松尾　厚

夏休みの課題

講義内容の理解を深めるのに適当と思う問題を見繕って取り上げたので，これらを題材に講義内容を復習し，必要なら適当な参考書を見て学習すること。拙速を避け，理解を深めながら，じっくり解くことを勧める。数学の問題では，問題文に「示せ」と書かれていなくても，得られた結論が正しいことを明確に論証することが求められていることに注意していただきたい。

以下では，特に断らない限り，集合 $\mathbb{R}^n$ の部分集合には $\mathbb{R}^n$ のユークリッド位相の部分位相を与えて位相空間とみなすものとする。大学一年次の微分積分学で学んだ内容は自由に用いてよい。フーリエ展開は用いる必要がないので用いないこと。

問題 1　次の集合を決定せよ。

(1) $\bigcup_{n=1}^{\infty}(-1+1/n, 1-1/n]$　(2) $\bigcap_{n=1}^{\infty}(-1-1/n, 1+1/n]$

問題 2　円周 S^1 上の関数全体のなす集合 X から直線 $\mathbb{R}$ 上の関数であって周期 1 を持つもの全体のなす集合への全単射を構成せよ。

問題 3　集合 X が与えられたとき，X 上の距離関数 $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ であって，それの定める位相が X 上の離散位相であるようなものを一つ求めよ。

問題 4　位相空間 X から位相空間 Y への写像 $f: X \longrightarrow Y$ および部分集合 $A \subset X$, $B \subset Y$ について以下の問に答えよ。

(1) 写像 f が連続ならば，その A への制限 $f|_A: A \longrightarrow Y$ も連続であることを示せ。ただし，集合 A には X の位相の部分位相を与える。

(2) 像 $f(X)$ が集合 B に含まれると仮定し，各 $x \in X$ に対して値 $f(x)$ を B の元と見て得られる写像を $g: X \longrightarrow B$ とする。このとき，f が連続であることと g が連続であることは互いに同値であることを示せ。ただし，集合 B には Y の位相の部分位相を与える。

問題 5　半開区間 $I = [0,1)$ および円周 $S^1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2=1\right\}$ について以下の問に答えよ。

(1) 連続な全単射 $f: I \longrightarrow S^1$ を一つ与えよ。

(2) 弧状連結の概念を利用して，位相空間 I と S^1 が互いに同相ではないことを示せ。

問題 6　平面 $\mathbb{R}^2$ から第一成分への射影を $\pi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ とする。このとき，$\mathbb{R}$ 上の次の二つの位相は一致することを示せ。

(1) 集合 $\mathbb{R}$ 上のユークリッド位相

(2) 平面 $\mathbb{R}^2$ のユークリッド位相の π に関する商位相

問題 7　$\mathbb{Z}$-加群の準同型の短完全列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

は分裂しないことを分裂の定義に基づいて示せ。

問題 8　平面 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $X = \big([-1,1) \times \{0\}\big) \cup \big(\{0\} \times (-1,1]\big)$ は原点のみからなる集合とホモトピー同値であることを示せ。

問題 9　特異ホモロジー群の関手性を利用して，連続写像 $f : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ および $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^1$ であって，合成写像 $g \circ f$ が恒等写像となるものは存在しないことを示せ。

問題 10　平面 $\mathbb{R}^2$ の部分空間 X を次のように定める。

$$X = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| (x+1)^2 + y^2 = 1 \text{ または } (x-1)^2 + y^2 = 1 \right\}$$

このとき，特異ホモロジー群 $\mathrm{H}_k(X, \mathbb{Z})$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ を決定せよ。

問題 11　球面 $S^2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$ の開集合 U, V を次のように定める。

$$U = \left\{ (x, y, z) \in S^2 \middle| z \neq 1 \right\},\ V = \left\{ (x, y, z) \in S^2 \middle| z \neq -1 \right\}$$

また，写像 $\varphi_U : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi_V : V \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を次のように定める。

$$\varphi_U(x, y, z) = \big(x/(1-z), y/(1-z)\big),\ \varphi_V(x, y, z) = \big(x/(1+z), y/(1+z)\big)$$

これらによって球面 S^2 は C^∞ 多様体となることを確認せよ。

問題 12　円周 $S^1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 = 1 \right\}$ の開集合 U, V を次のように定める。

$$U = \left\{ (x, y) \in S^1 \middle| y \neq 1 \right\},\ V = \left\{ (x, y) \in S^1 \middle| y \neq -1 \right\}$$

集合 U 上で $u = 2\arctan(x/(1-y))$ とし，V 上で $v = -2\arctan(x/(1+y))$ とすると，$U \cap V$ 上で $d/du = d/dv$ が成立することを示し，これを用いて接束 $\mathrm{T}S^1$ が自明であることを定義に従って示せ。

問題 13　平面 $\mathbb{R}^2$ 上の C^∞ 関数 f であって，$f(x+m, y+n) = f(x, y)$ が任意の $x, y \in \mathbb{R}$ および任意の $m, n \in \mathbb{Z}$ について成立するようなもの全体のなす $\mathbb{R}$ 上の線型空間を $C^\infty(T^2)$ とおく。このとき，以下の問に答えよ。

(1) 関数 $f, g \in C^\infty(T^2)$ が $f_y = g_x$ を満たすとき，積分

$$u(f) = \int_0^1 f(x, y)\,dx,\ \ v(g) = \int_0^1 g(x, y)\,dy$$

はともに定数であることを示せ。

(2) 関数 $F \in C^\infty(T^2)$ に対して $f = F_x$, $g = F_y$ とおくとき，$f_y = g_x$, $u(f) = v(g) = 0$ が成立することを示せ。

(3) 関数 $f, g \in C^\infty(T^2)$ が $f_y = g_x$, $u(f) = v(g) = 0$ を満たすとき，関数 $F \in C^\infty(T^2)$ で $f = F_x$, $g = F_y$ となるものを積分を用いて構成せよ。

(4) 問 (2)(3) の結論を次の形式の完全列によって記述せよ。

$$U \xrightarrow{\lambda} V \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}^2 \longrightarrow 0$$

ただし，U, V は $\mathbb{R}$ 上の線型空間であり，λ, μ は線型写像である。