2006年度 数学II 冬休みの宿題

松尾　厚

問題 1　以下の行列の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$

問題 2　平面 $\mathbb{R}^2$ の原点を通る直線 $\ell_1 : y = (1/\sqrt{3})x$, $\ell_2 : y = \sqrt{3}x$ を考え，それらに関する対称移動を表す行列をそれぞれ S_1, S_2 とする。このとき，行列の積 $A = S_2S_1S_2S_1S_2S_1$ の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ。

問題 3　次数が $n-1$ 以下の多項式全体のなすベクトル空間を V とし，各 $i = 1, \ldots, n$ に対して，単項式 x^{i-1} を V に属するベクトルとみたものを v_i とおく。このとき，$v_1, \ldots, v_n$ は V の基底である。

(1) 多項式 $p(x)$ に対して多項式 $p(x+1)$ を対応させる写像 F は，V から V への線型変換であることを示せ。

(2) 線型変換 F を V の基底 $v_1, \ldots, v_n$ によって行列表示して得られる行列を A とするとき，逆行列 A^{-1} を求めよ。