2006 年度　数学 II　　　　2006 年 9 月 14 日
松尾　厚

期末試験採点講評

今回の期末試験では，行列に関する計算技法を適切に利用し，正確に計算が実行できるかどうかを試す問いを 3 問，関連する諸概念を正確に理解して運用できるかどうかを試す問いを 3 問，合計 6 問の問題を出題しました。

原則として，今回の期末試験の採点結果をもとにして成績を付けましたが，結果が芳しくないものについては，平常点を加味して成績を付けました。

残念ながら不可となった人は，反省してよく勉強し，追試験に備えてください。

問題 1 の略解と講評

(1)　求める逆行列は次の行列である。

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & -3 & 3 \\ -1 & -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

逆行列を求める問題では，与えられた行列と実際に掛け合わせて単位行列になるかどうかを確認することによって，検算することができます。せっかく計算したのに，検算せずに計算ミスを放置して点数を落とすことになったと思われる答案が少なからずありました。

(2)　求める行列式の値は $\det \mathrm{B} = 1700000$ である。

教科書の例題をしっかり学んで，適切なやり方を選択して計算すれば，長く見積もってもせいぜい 5 分程度で計算できます。計算ミスを防ぐために何度か計算し直したとしても，せいぜい 15 分程度で正しく解答できるはずです。皆さんの日頃の勉強の成果が試される問題であったと思います。

(3)　与えられた行列に行基本変形を繰り返し施すと，例えば次のようになる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x & x^2-1 \\ 0 & 0 & x^2-3x+2 & x^4-7x^2+12 \end{pmatrix}$$

ここで，第 3 行に注目すると，

$$x^2-3x+2 = (x-1)(x-2), \quad x^4-7x^2+12 = (x-2)(x+2)(x^2-3)$$

よって求める階数は，$x=2$ のとき $\mathrm{rank}\ \mathrm{C} = 2$, $x \neq 2$ のとき $\mathrm{rank}\ \mathrm{C} = 3$ である。

基本変形の計算を丁寧に実行していけば結論は容易に得られるのですが，計算ミスのために点数を落とした答案が少なからずありました。慎重に計算して着実に正解することが大切です。

問題 2 の略解

(1)　例えば，変形前の行列として単位行列をとると，その階数は 3 である。これに対して与えられた変形を施すと

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となり，変形後の行列の階数は 2 である。行列の階数は行基本変形によって変わらないので，与えられた変形は行基本変形の繰り返しでは得られない。

この問題では，与えられた変形が，ある特別な基本変形の繰り返し方で得られないことを示しただけでは不十分で，ありとあらゆる基本変形の繰り返し方を考慮してもなお得られないことを示す必要があります。
なお，行列式を利用するやり方も考えられますが，行列式の値そのものは基本変形によって変化しますので，答案の述べ方に注意が必要です。

(2)　実数 t に対して，$\mathbf{p}_t = \mathbf{p}' + t(\mathbf{p}'' - \mathbf{p}')$ とおく。すると，任意の実数 t に対して $\mathbf{x} = \mathbf{p}_t$ は与えられた方程式 $\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解である。しかるに，$\mathbf{p}'$ と $\mathbf{p}''$ は相異なるので，$s \neq t$ のとき $\mathbf{p}_s \neq \mathbf{p}_t$ である。実数は無数に存在するので，方程式 $\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解も無数に存在する。

行列 A は正方行列とは限りませんので，逆行列や行列式を利用するわけにはいきません。また，拡大係数行列の階数と解の自由度の考え方を利用して答えることも考えられますが，解が無数に存在する理由を明確に述べる必要があります。

(3)　求める行列は，次の二つである。

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

座標軸上の点 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ を問題文にあるように回転して得られる三つの点の座標を計算すれば，求める行列が得られます。点 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ が，回転軸上の点 $(1/3,1/3,1/3)$ を中心とする正三角形の頂点をなしていることに注目すると良いでしょう。