余因子展開とその応用

私の不徳の致すところにより時間が不足して授業で詳しく説明できなかった部分を解説しますので参考にしてください。

1. 正方行列の余因子

サイズが $n \times n$ の正方行列 A の第 i 行と第 j 列の成分をすべて 0 で置き換え，ただし第 (i,j) 成分だけは 1 で置き換えて得られる行列の行列式を A の第 (i,j) 余因子といい，$\widetilde{a}_{ij}$ と表す。

余因子 $\widetilde{a}_{ij}$ は，第 i 行と第 j 列を消去して得られるサイズが $(n-1)\times(n-1)$ の行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ を掛けたものに等しい。

$$\widetilde{a}_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j-1} & 0 & a_{1j+1} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-1j-1} & 0 & a_{i-1j+1} & a_{i-1n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{i+11} & a_{i+1j-1} & 0 & a_{i+1j+1} & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{nj-1} & 0 & a_{nj+1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j-1} & a_{1j+1} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{nj-1} & a_{nj+1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

実際，この式の左辺の行列の第 i 行を一つづつ上の行と交換して第 1 行に持っていき，また第 j 行を一つづつ左の列と交換して第 1 列に持って行く。すると，交代性から，行列式の値には符号 $(-1)^{(i-1)+(j-1)} = (-1)^{i+j}$ が掛かる。ここで

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{1j-1} & a_{1j+1} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{i-11} & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & a_{i-1n} \\ 0 & a_{i+11} & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & a_{nj-1} & a_{nj+1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j-1} & a_{1j+1} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{nj-1} & a_{nj+1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

であることが行列式の定義から分かるので，求める関係式が得られた。

2. 余因子展開

正方行列 A の第 i 行は次のような一次結合に分解される。

$$(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots, a_{in}) = a_{i1}(1, 0, 0, \ldots, 0) + a_{i2}(0, 1, 0, \ldots, 0) + \cdots + a_{in}(0, 0, 0, \ldots, 1)$$

よって，多重線型性を用いて

$$\det \mathrm{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{i2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + a_{in} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

右辺の第 j 番目の項を取り出すと，各 $j = 1, \ldots, n$ について

$$a_{ij} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{2n} \end{vmatrix} = a_{ij} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \end{vmatrix} = a_{ij}\widetilde{a}_{ij}$$

よって，次の式が得られた。

$$\det \mathrm{A} = a_{i1}\widetilde{a}_{i1} + a_{i2}\widetilde{a}_{i2} + \cdots + a_{in}\widetilde{a}_{in}$$

これを，行列式 $\det \mathrm{A}$ の第 i 行に関する余因子展開という。
　同様にして，行列 A の第 j 列について次が成立する。

$$\det \mathrm{A} = \widetilde{a}_{1j}a_{1j} + \widetilde{a}_{2j}a_{2j} + \cdots + \widetilde{a}_{nj}a_{nj}$$

これを，行列式 $\det \mathrm{A}$ の第 j 列に関する余因子展開という。

3. 余因子展開の具体形

第 i 行に関する展開は次のようになる。

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
= (-1)^{i+1}a_{i1}
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
+(-1)^{i+2}a_{i2}
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
+\cdots+
$$

$$
+(-1)^{i+n}a_{in}
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

ただし，線を引いた部分は消去して取り除く。

第 j 列に関する展開は次のようになる。

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
= (-1)^{j+1}a_{1j}
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
+(-1)^{j+2}a_{2j}
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
+\cdots+
$$

$$
+(-1)^{j+n}a_{nj}
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

ただし，線を引いた部分は消去して取り除く。

4. 余因子行列と逆行列の公式

第 (i,j) 成分が行列 A の第 (i,j) 余因子であるような行列の転置行列を A の余因子行列といい，$\widetilde{\mathrm{A}}$ と表す。

$$\widetilde{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{21} & \cdots & \widetilde{a}_{n1} \\ \widetilde{a}_{12} & \widetilde{a}_{22} & \cdots & \widetilde{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \widetilde{a}_{1n} & \widetilde{a}_{2n} & \cdots & \widetilde{a}_{nn} \end{bmatrix}$$

余因子行列の性質　正方行列 A およびその余因子行列 $\widetilde{\mathrm{A}}$ に対して次が成立する。

$$\mathrm{A}\widetilde{\mathrm{A}} = \widetilde{\mathrm{A}}\mathrm{A} = (\det \mathrm{A})\ \mathrm{E}$$

ただし，E は単位行列であり，$\det \mathrm{A}$ は行列 A の行列式である。

　この性質から直ちに次の公式が得られる。この公式は，理論的には重要であるが，実用的とは言い難い。

逆行列の公式　正方行列 A が $\det \mathrm{A} \neq 0$ を満たすならば，行列 A は正則であって，逆行列 A^{-1} は余因子行列 $\widetilde{\mathrm{A}}$ を用いて，

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathrm{A}}\widetilde{\mathrm{A}}$$

によって与えられる。

2 × 2 の場合　余因子の定義により，

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{の余因子行列は} \quad \widetilde{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

これに対して，関係式 $\mathrm{A}\widetilde{\mathrm{A}} = \widetilde{\mathrm{A}}\mathrm{A} = (\det \mathrm{A})\ \mathrm{E}$ は容易に確かめられる。これより，$\det \mathrm{A} = ad - bc \neq 0$ の場合には，逆行列は良く知られた次の公式で与えられる。

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

3 × 3 の場合　余因子の定義により，

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{の余因子行列は} \quad \widetilde{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

よって，$\det \mathrm{A} \neq 0$ のときに，逆行列は次で与えられる。

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

余因子行列の性質の証明　番号 i を固定し，$i \neq j$ となる j について，A の第 i 行を第 j 行で置き換えた行列を考え，それを X と置く。すなわち，行列 X の第 i 行については

$$x_{ik} = a_{jk}, \quad (k = 1, \ldots, n)$$

であり，それ以外の行については，行列 X の成分と行列 A の成分は一致している。このとき，行列 X の第 (i,k) 余因子 $\widetilde{x}_{ik}$ を考えると，

$$\widetilde{x}_{ik} = \widetilde{a}_{ik}, \quad (k = 1, \ldots, n)$$

実際，これらの余因子は，第 i 行と第 k 列を取り除いて得られる行列の行列式に符号を付けたものであり，行列 A と行列 X は第 i 行以外は一致しているので，余因子の値は A でも X でも同じである。

さて，行列 X の第 i 行に関する余因子展開を考えると

$$\det \mathrm{X} = x_{i1}\widetilde{x}_{i1} + x_{i2}\widetilde{x}_{i2} + \cdots + x_{in}\widetilde{x}_{in} = a_{j1}\widetilde{a}_{i1} + a_{j2}\widetilde{a}_{i2} + \cdots + a_{jn}\widetilde{a}_{in}$$

ところが，行列 X は第 i 行と第 j 行が一致しているので，交代性から $\det \mathrm{X} = 0$ である。よって

$$a_{j1}\widetilde{a}_{i1} + a_{j2}\widetilde{a}_{i2} + \cdots + a_{jn}\widetilde{a}_{in} = 0$$

一方，$i = j$ の場合には，行列 A の余因子展開そのものによって

$$a_{i1}\widetilde{a}_{i1} + a_{i2}\widetilde{a}_{i2} + \cdots + a_{in}\widetilde{a}_{in} = \det \mathrm{A}$$

以上の二つの式を Kronecker のデルタを用いてまとめると，

$$a_{j1}\widetilde{a}_{i1} + a_{j2}\widetilde{a}_{i2} + \cdots + a_{jn}\widetilde{a}_{in} = (\det \mathrm{A})\delta_{j,i}$$

余因子行列は余因子を並べて得られる行列の転置行列であるから，この式の左辺は行列の積 $\mathrm{A}\widetilde{\mathrm{A}}$ の第 (j,i) 成分に他ならない。よって，関係式 $\mathrm{A}\widetilde{\mathrm{A}} = (\det \mathrm{A})\ \mathrm{E}$ が得られた。同様に，各列に関する余因子展開を用いて，$\widetilde{\mathrm{A}}\mathrm{A} = (\det \mathrm{A})\ \mathrm{E}$ が得られる。

5. Cramer の公式

逆行列による連立方程式の解法 未知数が n 個であるような n 個の一次式を連立して得られる連立方程式を考える。係数行列 A は $n \times n$ の正方行列であって，与えられた方程式は $\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ と表される。すなわち，

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ここで $\det \mathrm{A} \neq 0$ とすると，逆行列 A^{-1} が存在するが，公式により，余因子行列 $\widetilde{\mathrm{A}}$ を用いて $\mathrm{A}^{-1} = (\det \mathrm{A})^{-1}\widetilde{\mathrm{A}}$ と表される。これを方程式の両辺に左からかけると，

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathrm{A}} \begin{bmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{21} & \cdots & \widetilde{a}_{n1} \\ \widetilde{a}_{12} & \widetilde{a}_{22} & \cdots & \widetilde{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \widetilde{a}_{1n} & \widetilde{a}_{2n} & \cdots & \widetilde{a}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

従って，解 $\mathbf{x} = {}^{\mathrm{t}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の第 j 成分 x_j は

$$x_j = \frac{\widetilde{a}_{1j}b_1 + \widetilde{a}_{2j}b_2 + \cdots + \widetilde{a}_{nj}b_n}{\det \mathrm{A}}$$

によって与えられるが，この式の右辺の分子と行列 A の第 j 列に関する余因子展開

$$\det \mathrm{A} = \widetilde{a}_{1j}a_{1j} + \widetilde{a}_{2j}a_{2j} + \cdots + \widetilde{a}_{nj}a_{nj}$$

を比較すると，分子の式は余因子展開に現れる a_{ij} を各 $i = 1, \ldots, n$ について b_i に置き換えたものに一致している。以上から，次の公式が得られた。

Cramer の公式 $n \times n$ 正方行列 A が $\det \mathrm{A} \neq 0$ を満たすとき，A を係数行列とする連立方程式 $\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ はただひと組の解 $\mathbf{x} = {}^{\mathrm{t}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を持ち，それは

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}, \quad (j = 1, \ldots, n)$$

で与えられる。