中間試験採点講評

今回の中間試験では，５つの小問を課しましたが，そのうち小問Aから小問Dまでの計4問について，各20点満点，合計80点満点で採点しました。この点数は暫定的なもので，最終的な成績を判定するための参考とするためのものです。

小問Aの略解と講評

(1) $A \subseteq B$ であるとは，任意の $x \in A$ に対して $x \in B$ が成立することである。

(2) $y \in f(A)$ であるとは，$f(x) = y$ となる $x \in A$ が存在することである。

(3) 任意の元 $y \in f(A)$ をとる。すると $f(x) = y$ となる $x \in A$ が存在するので，そのような x を一つとる。このとき $x \in A$ であるから，仮定により $f(x) \in B$ となるが，$f(x) = y$ であるから $y \in B$ となる。以上により，任意の $y \in f(A)$ に対して $y \in B$ となることが示されたので， $f(A) \subseteq B$ が証明された。

集合に関しては，記号 $\in$ で表される所属関係がすべてに優先する基本事項であって，これに基づいてさまざまな概念が定義されます。本小問の(1)(2)は，このことをきちんと理解しているかどうかを試すものです。また，(3)は，定義に基づいて形式の整った証明を述べることができるかどうかを試すものです。

(1)と(2)については，文章で答えることを求められているにもかかわらず，記号だけで答えている答案が少なからずありましたが，今回は大目に見ました。(3)については『説明としてはよいが形式の整った証明になっていない答案』については，その程度に応じて減点しました。

なお，(1)(2)(3)のいずれかの答が誤っている答案については，部分点を与えずに零点としました。

小問Bの略解と講評

(1) $x \leq -1$ のときは，任意の正整数 n に対して $x < -1 + 1/n$ であるから $x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+}[-1+1/n, 1-1/n)$ である。$-1 < x < 1$ のときは，$x+1 > 0$ かつ $1-x > 0$ であるから，$x+1 \geq 1/n$ かつ $1-x > 1/n$ となる正整数 n が存在するので，$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+}[-1+1/n, 1-1/n)$ である。$x \geq 1$ のときは，任意の正整数 n に対して $1 - 1/n \leq x$ であるから $x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+}[-1+1/n, 1-1/n)$ である。よって，求める集合は，開区間 $(-1, 1)$ である。

(2) $x < -1$ のときは，$-1-x > 0$ であるから，$-1-x > 1/n$ すなわち $x < -1-1/n$ となる正整数 n が存在するので，$x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}^+}[-1-1/n, 1+1/n)$ である。$-1 \leq x \leq 1$ のときは，任意の正整数 n に対して $-1-1/n \leq x < 1+1/n$ であるから $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^+}[-1-1/n, 1+1/n)$ である。$x > 1$ のときは，$x-1 > 0$ であるから，$x-1 > 1/n$ すなわち $x > 1+1/n$ となる正整数 n が存在するので，$x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}^+}[-1-1/n, 1+1/n)$ である。よって，求める集合は，閉区間 $[-1, 1]$ である。

この問題は，集合族に関する基本的な問題であり，集合族の共通部分と和集合の概念を正しく理解できているかどうかを問うものです。

この問題では『証明せよ』とは言っていませんので，証明の形式が整っているかどうかは問いませんが，説明が集合族の共通部分と和集合の定義に則っているかどうかが採点のポイントです。従って，極限 $n \to \infty$ を考えるなど，定義に基づいていない答案は減点の対象となります。なお，(1)(2) のいずれかの答が誤っている答案については，部分点を与えずに零点としました。

小問 C の略解と講評

各 $A \in \mathscr{P}(X)$ に対して，$(A \cap S\,,\, A \cap T) \in \mathscr{P}(S) \times \mathscr{P}(T)$ を対応させる写像を f とする。このとき，$S \cap T = \varnothing$ により f が全射であることが示され，$S \cup T = X$ により f が単射であることが示される。詳細は略する。

この問題は，集合族の間の全単射に関する問題であり，冪集合の定義，直積の定義，全単射の定義を正しく理解して運用できるかどうかを問うています。

順序対 $(A \cap S, A \cap T)$ を対応させるべきところ，直積 $(A \cap S) \times (A \cap T)$ を対応させている答案がいくつかありました。前者は $\mathscr{P}(S) \times \mathscr{P}(T)$ の元であり，後者は $\mathscr{P}(S \times T)$ の元ですから，全く異なるものです。好意的に解釈すれば，後者の記法でもって前者を表していると見なせなくもありませんが，正しい理解のもとで書かれた答案かどうかが文面から判定できませんので，点数は与えないこととしました。

さて，写像 f が全射であることを示す際に条件 $S \cap T = \varnothing$ を用いる必要があり，また f が単射であることを示す際に条件 $S \cup T = X$ を用いる必要があります。これらの条件は，それらがなかったら示すべき主張が成立しないという点で，見過ごすことのできない決定的に重要なポイントです。よって，これらの条件をどこでどのように使用したのかが不明確な答案は，程度に応じて減点しました。

小問 D の略解と講評

任意の $a, b \in X$ をとり，$f(a) = f(b)$ であると仮定する。集合 W として $W = \{0\}$ をとり，$g(0) = a$，$h(0) = b$ によって W から X への写像 g および h を定める。このとき $f(a) = g(a)$ により $(f \circ g)(0) = (f \circ h)(0)$ であるから $f \circ g = f \circ h$ が成立する。よって，仮定から $g = h$ となり，従って $g(0) = h(0)$ すなわち $a = b$ が成立する。以上により，f は単射であることが示された。

この問題は，写像の合成を正しく運用できるかどうかを試す問題のはずでしたが，結果的には，論理が正しく運用できるかどうかを試す問題ということになってしまいました。

証明中で『任意の集合 W および任意の写像 $g, h : W \to X$ に対して $f \circ g = f \circ h$ ならば $g = h$ となる』という仮定を適用するわけですが，その際には，結論を示すのに都合の良い性質を持つ集合 W と写像 g, h を具体的に定めて，それに対して仮定を適用する必要があります。しかし，これを怠り，集合 W と写像 g, h を定めずに済ませたのでは，論理がつながらず，示すべき結論を証明したことになりません。そこで，そのような答案は程度に応じて減点しました。