# トーラスを折り目とする 3 次元球面から 3 次元空間への折り目写像の構成法について *

山本　稔（弘前大学教育学部）

## 1　序

本稿では，多様体や写像は特に断らない限り全て $C^\infty$ 級とする．

$n$ 次元閉多様体 $M$ からの写像 $f : M \to \mathbb{R}^n$ に対し，$S(f) = \{q \in M | \mathrm{rank}(df_q) < n\}$ を $f$ の特異点集合と呼び，像 $f(S(f))$ を $f$ による $M$ の輪郭と呼ぶ．任意の $q \in S(f)$ に対し，$q \in S(f)$ を中心とする局所座標系 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ と $f(q) \in \mathbb{R}^3$ を中心とする局所座標系 $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ が存在し，

$$y_1 \circ f = x_1, y_2 \circ f = x_2, \ldots, y_{n-1} \circ f = x_{n-1}, y_n \circ f = x_n^2$$

と表されるとき，$f$ を折り目写像，$S(f)$ を折り目（集合）と呼ぶ．折り目 $S(f)$ は $M$ 内の $(n-1)$ 次元閉部分多様体になり，$f|S(f) : S(f) \to \mathbb{R}^n$ ははめ込みになることに注意する．

Eliashberg は次の定理を得た．

**定理 1.1** ([1, Theorem B の一部])．$M$ を安定平行化可能な 3 次元連結閉多様体，$V$ を $M$ 内の空でない閉曲面で，$V$ によって $M$ は 2 つの多様体 $M_1, M_2$ に分かれるとする ($M_1, M_2$ はそれぞれ非連結でも良い)．このとき，折り目写像 $f : M \to \mathbb{R}^3$ で $S(f) = V$ となるものが存在する．

これより，$M$ が向き付け可能な 3 次元連結閉多様体，$V$ を $M$ を $M = M_1 \cup M_2$ と Heegaard 分解したときの Heegaard 曲面とすると，$V$ を折り目とする折り目写像 $f : M \to \mathbb{R}^3$ が存在することが分かる．そこで講演ではトーラスを折り目とする折り目写像 $f : S^3 \to \mathbb{R}^3$ の具体的な構成法を紹介する．

* 本研究は JSPS 科研費（25800032）の助成を受けている

## 2　構成の手順

以下の手順で構成する．

1. $S^2 \cup S^2$ を折り目とする折り目写像 $f_1 : S^3 \to \mathbb{R}^3$ を構成する．$f_1$ の構成には球面の裏返しを用いる．
2. Eliashberg の次の定理の証明を参考に $f_1$ の折り目を手術することで目的の折り目写像 $f : S^3 \to \mathbb{R}^3$ を構成する．

   **定理 2.1** ([1, Theorem 3.12 の一部])**.** $M, N$ を 3 次元多様体とする．もし $M$ が連結で，ある部分多様体を折り目とする折り目写像 $f : M \to N$ が存在するならば，ある連結部分多様体を折り目とする折り目写像 $g : M \to N$ で $f$ とホモトピックなものが存在する．

## 3　写像の表示方法

目的の写像をセクション 2 の手順によって構成する際，写像をどのように紙の上に表示するか工夫する必要がある．今回は次の方法をとることにした．

1. $M$ を 3 次元連結閉多様体，$f : M \to \mathbb{R}^3$ を折り目写像，$\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を $\pi(z_1, z_2, z_3) = (z_1, z_2)$ で表される直交射影としたとき，$\pi \circ f|S(f) : S(f) \to \mathbb{R}^2$ が安定写像になるように $f$ をホモトピーで動かす．
2. $f|S(f) : S(f) \to \mathbb{R}^3$ を安定写像 $\pi \circ f|S(f)$ のジェネリックなはめ込みリフトとして構成する．ここで $\pi' : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を $\pi'(z_1, z_2, z_3) = z_1$ で表される直交射影としたとき，$f(S(f)) \subset \mathbb{R}^3$ の表示は紙の上では次のようにする．
   (a) $\pi'(f(S(f))) = [a, b] \subset \mathbb{R}$ とする．このとき，適当な実数列 $a_0 < a < a_1 < a_2 < \cdots < a_{k-1} < b < a_k$ に対し，平面 $P_i = {\pi'}^{-1}(a_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$ によって $f(S(f))$ を切断する．
   (b) $S_i = {\pi'}^{-1}([a_{i-1}, a_i]) \cap f(S(f))$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ とおく．隣り合う $S_{i-1}$ と $S_i$ は少し離してかく．$S_i$ の $P_{i-1}, P_i$ による断面 $\partial S_i$ が見やすくなるように，近くを小さく，遠くを大きくかく偽透視図法で表示する．これにより，$\partial S_i$ が紙の上に見えるようにする．
3. $M \setminus S(f) = M_1 \cup M_2$ とおくと，$f|M_1$ は向きを保つはめ込み，$f|M_2$ は向きを逆に

するはめ込みになる．そこで，2 で表示した $f(S(f))$ のコピーを 2 枚用意する．$S_i$ を切り出す 2 平面 $P_{i-1} \cup P_i$ 上に，$\partial S_i$ から $(P_{i-1} \cup P_i) \cap f(M_1), (P_{i-1} \cup P_i) \cap f(M_2)$ への拡張方法を与えるガイドをそれぞれ表示する．

上の境界での拡張を自然に内部にまで拡張する事により，$\pi'^{-1}([a_{i-1}, a_i]) \cap f(M_1), \pi'^{-1}([a_{i-1}, a_i]) \cap f(M_2)$ の構成法が分かる．これより $f(M_1), f(M_2)$ の構成法，さらには折り目写像 $f : M \to \mathbb{R}^3$ の構成法が紙の上に表現出来たことになる．

折り目が $S^2$ で $S^3 \setminus S(f) = M_1 \cup M_2$ としたとき，$f(M_1) = f(M_2)$ となる折り目写像 $f : S^3 \to \mathbb{R}^3$ の一例は図 1 のようにして表現される．

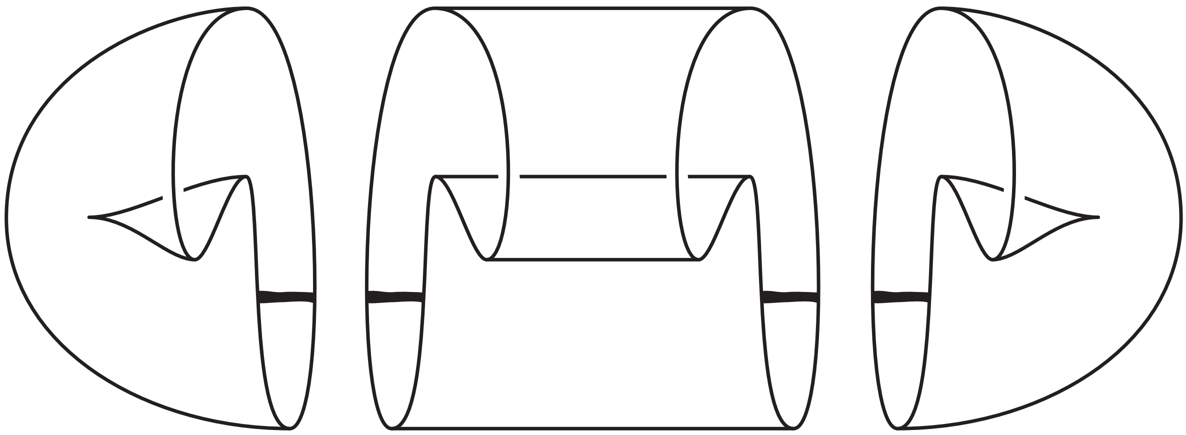

図 1　$f(M_1) = f(M_2)$ の表示．ここで，黒のバンドは $f(M_1) = f(M_2)$ の一部で，$f(S(f))$ からの拡張方法を示すガイドになる．

## 4　目的の折り目写像の輪郭

目的の折り目写像，$f : S^3 \to \mathbb{R}^3, S(f) = T^2$ の表示を試みる．本稿では輪郭 $f(S(f)) \subset \mathbb{R}^3$ の平面像の輪郭 $\pi \circ f(S(\pi \circ f)) \subset \mathbb{R}^2$ を図 2 で与えるにとどめ，具体的な表示は講演で紹介する．

注意 4.1. $S(\pi \circ f)$ は $S(f)$ 内，1 次元閉部分多様体となり，有限個の点を除き折り目特異点からなる（残りの有限個の点はカスプ）．$S(\pi \circ f)$ の $S(f)$ 内での近傍の像と $M$ 内での近傍の像の関係から，$S(\pi \circ f)$ の折り目特異点とその像は 2 色塗りされる．また $f(S(f))$ は向き付け可能な閉曲面になるので，$f(S(f))$ に向きを入れ，$f(S(f))$ と $\mathbb{R}^2$ の向きから

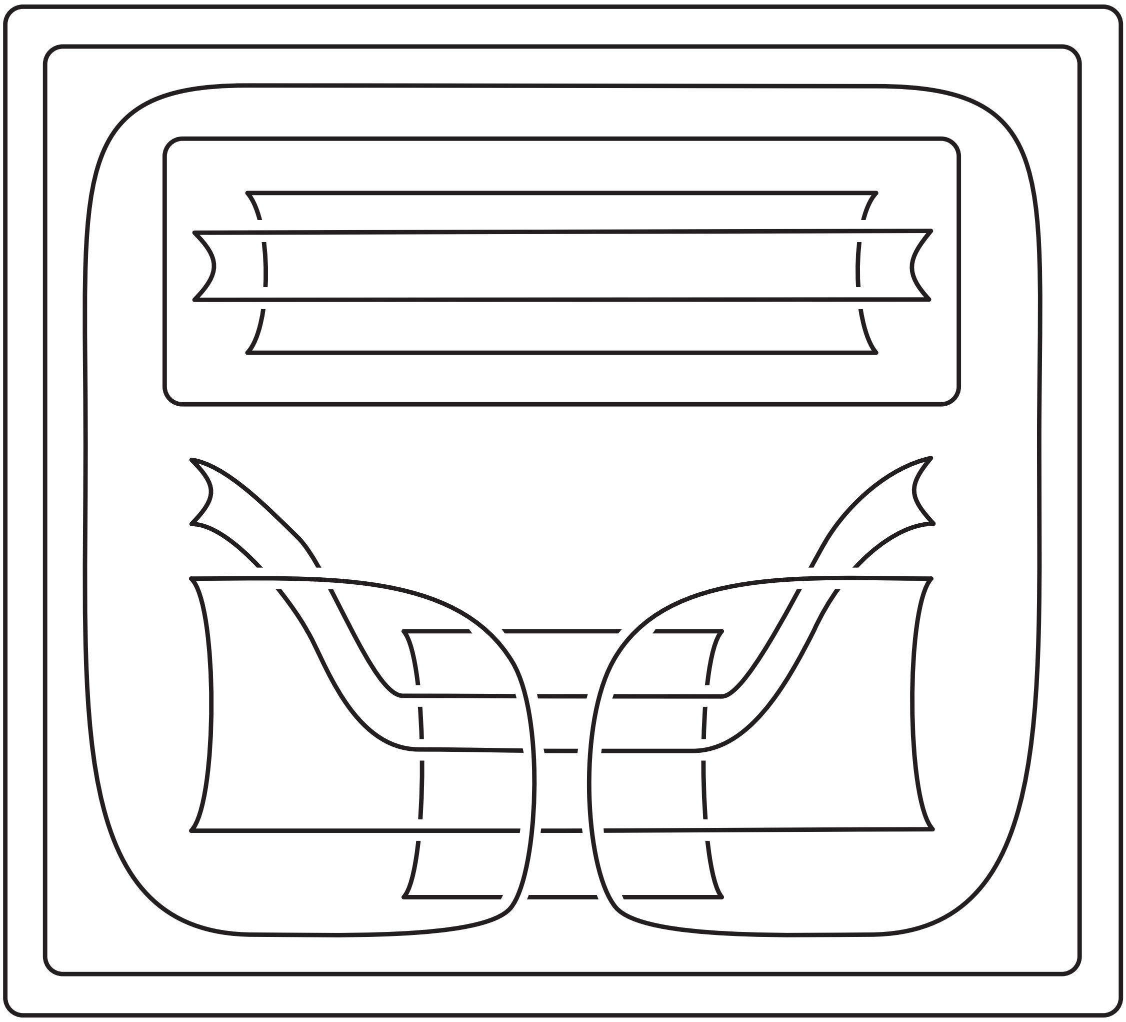

図 2　輪郭 $f(S(f)) \subset \mathbb{R}^2$ の平面像の輪郭 $\pi \circ f(S(\pi \circ f)) \subset \mathbb{R}^2$ の表示.

$S(\pi \circ f)$ のカスプとその像も 2 色塗り可能である．講演では $\pi \circ f(S(\pi \circ f)) \subset \mathbb{R}^2$ を 2 色塗りした状態で紹介する.

## 参考文献


[1] Y. M. Eliashberg, *Singularities of folding type*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **34** (1970) 1110–1126.