Divide link に沿う lens space surgery と 4次元多様体

山田 裕一[*]　（電気通信大学）

松本幸夫 先生の７０歳のお祝いの機会に

1　ディバイド絡み目 (Divide link)

定義 1. A'Campo 氏による「絡み目の**ディバイド表示**」とは, 単位円板 D^2 内に proper で generic にはめ込まれた曲線 P に対して S^3 内の絡み目 $L(P)$ を定める構成法である. 定義は次の通り (A'Campo [A])：まず S^3 を, 次のように D の接束 TD の部分空間とみなす.

$$S^3 = \{(u,v) \in D \times T_uD \,|\, |u|^2 + |v|^2 = 1\}.$$

その部分集合として, P から定まる $L(P)$ を, 次のように構成する.

$$L(P) = \{(u,v) \in D \times T_uD \,|\, u \in P,\ v \in T_uP,\ |u|^2 + |v|^2 = 1\} \subset S^3.$$

P の内点は S^3 の 2 つの点に, P の端点 ∂P $(= P \cap \partial D)$ は $v = 0$ なので S^3 の 1 点に対応する. P は generic, 特に自己接点をもたないため, $L(P)$ は S^3 内の閉曲線で向きを持つ, つまり oriented link となる. ディバイド表示できる絡み目をディバイド絡み目という.

実は, 定義よりも由来で考えるのがわかりやすい：複素 xy-平面内の, 原点に孤立特異点をもつ代数曲線 $C: f(x,y) = 0$ に対して, 特異点の link $C \cap S^3_\varepsilon$ を考えるために, 「必要な情報（交点, f の鞍点）が実部に残るように摂動して C と実部 xy-平面との交わりの曲線を描いたもの」が ディバイド表示の由来である. なお, 名称の由来は, 曲線によって平面が多くの領域に分割 (divide) されることらしい.

例 1. (1) $P: y = 0$ に対して $L(P)$ は unknot.　　(2) $P: xy = 0$ のとき $L(P)$ は（正の）Hopf link.

(3) $P: y^{2n+1} - x^2 = 0$ は $y(y-\varepsilon)^2(y-2\varepsilon)^2 \cdots (y-n\varepsilon)^2 - x^2 = 0$ により, $L(P)$ は $T(2n+1, 2)$.

(4) $P: y^4 - x^3 = 0$（E_6 特異点）は $(y^2 + \varepsilon(6x + 32\varepsilon^2))^2 - (x + 7\varepsilon^2)^2(x + 22\varepsilon^2) = 0$ により $T(4,3)$.

より広い典型例として次を挙げたい. 以下では, 大きさは相似変形で調節することにして, P が円板 D 内の曲線であったことは忘れ, P の平面曲線としての形に注目する.

事実 1. [合田-平澤-Y] xy 平面内で $\{\cos \pi x = \cos \pi y\}$ の定める斜めの格子 を $\mathfrak{X}$ で表すとする. (a,b) を自然数の組とする. $R(a,b)$ を格子点 $(\mathbb{Z}^2)$ に頂点をもち, 辺が x-軸または y-軸に並行な $a \times b$ の長方形とするとき, 格子 $\mathfrak{X}$ と $R(a,b)$ との共通部分として得られる折れ線の曲線は（Lissajous 曲線 $(\cos a\theta, \cos b\theta)$ と同相であり）, トーラス絡み目 $T(a,b)$ のディバイド表示となる (図 1).

ディバイド絡み目は, 式がなくても実部の曲線の絵が直接 S^3 内の link を定めるようにしたことと, それによって代数曲線の特異点の link （iterated torus knots に限られる）以外の結び目も表せることが長所と言える. ディバイド絡み目は, 代数曲線の孤立特異点の性質のいくつかを共有する (ファイバー性など). また, いくつかの結び目不変量（４次元種数など）を表示から求めることができる (A'Campo, 平澤, Rudolph 他).

[*]Supported by KAKENHI (Grant-in-Aid for Scientific Research) No.24540070.

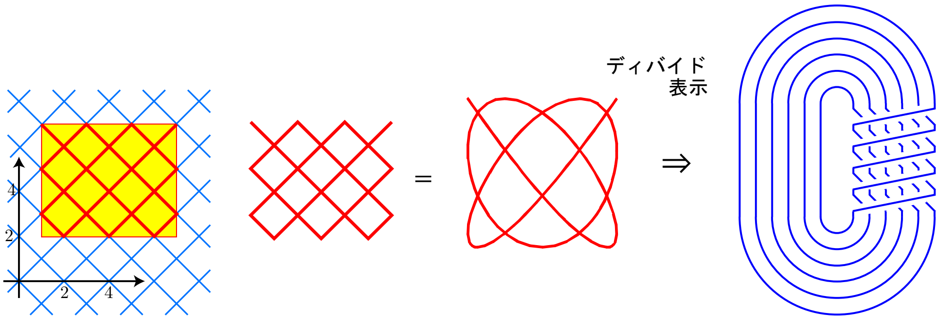

図 1: トーラス結び目 $T(6,5)$ のディバイド表示

2 レンズ空間手術 (lens space surgery)

結び目（１成分）に沿うデーン手術 (K, n) が, レンズ空間になるとき**レンズ空間手術**という. 必要なら鏡像と多様体の向きを変えることで, 手術係数は正のものを考えることとする. トーラス結び目のデーン手術は Moser 氏が考察しており, 整数係数のレンズ空間手術は２つ $(T(a, b); ab\pm 1) = -L(ab\pm 1, a^2)$ のみであることが知られている. その後, トーラス結び目の２ケーブル $C(T(a, b); 2ab\pm 1)$ がレンズ空間手術をもつことが知られた. その後, Fintushel–Stern 両氏によって双曲結び目 $K = P(-2, 3, 7)$ がレンズ空間手術をもつ $(K; 18) = -L(18, 7), (K; 19) = -L(19, 7)$ ことが発見されて本格化した. 双曲結び目に対して, デーン手術はほとんどが双曲多様体で, その例外は高々有限個しかないことが知られており「例外的デーン手術」と呼ばれる. その後, Berge 氏はそれまでに知られたレンズ空間手術の構造「double-primitive knots」を指摘し, 具体例を大きく３種類, 細かくは 12Type(I〜XII) に分類した:「Berge のリスト」. ３種類とは

(1) KIST	I 〜VI	: Solit torus を保つ手術に由来するもの “Berge–Gabai knots”
(2) KG1F	VII, VIII	: genus one fiber surface に乗っているもの
(3) Sporadic	IX〜XII	: 上記以外の散発的なもの

である. レンズ空間手術が Berge のリストで尽きていると予想されているが, まだ証明されていない. 最近, Greene 氏は, レンズ空間手術によって生じるレンズ空間は Berge のリストから得られるもので尽きるか という問題を提起し, Heegaard–Floer ホモロジー を用いた研究を報告している [Gr]. 以下では, レンズ空間手術の研究が４次元多様体論に近づいていることを説明したい.

レンズ空間手術と４次元多様体論. 有理ホモロジー球体を bound するレンズ空間の研究が Lisca 氏によってなされた. 存在証明では 0-, 1-, 2- handle が１個ずつのものが考えられており, $S^1 \times S^2$ からのレンズ空間手術の話と言える. 証明には４次元多様体論を利用する. レンズ空間は, 連分数展開による負定値な Plumbing (C とする) の境界となる. レンズ空間が有理ホモロジー球体 W の境界でもあるとすると C と $-W$ を境界で貼り合わせることにより, 単連結で負定値な閉多様体 $C \cup (-W)$ が得られる. Donaldson の定理からその２次ホモロジーの交叉形式は $\oplus^n(-1)$ 型となる. （筆者は その多様体が standard かどうか確認したくなる）従って, その中で C の交叉形式が実現できないといけない. その条件を調べると, 基本的な３つのもの の blow-up に限られることが示される. blow-up は full-twist に対応する. 茂手木氏により, 例外的手術をもつ（S^3 内の）結び目の多くは full-twist で関係し合っていること（Seifert Network）が詳細に調べられている.

前述の Greene 氏の考察 [Gr] は Lisca の発想を用いたと本人が言っていた．ただし, 有理ホモロジー球体 W の代わりに「S^3 に K に沿って 2 ハンドルを付けたもの P」に置き換える必要がある．（筆者は, (2)KG1F のレンズ空間手術について, $C \cup (-P)$ に相当する負定値な閉多様体が $\sharp n\overline{\mathbb{C}P}^2$ と可微分同相であることを Kirby calculus で示していた [Y1]. それらの knot は torus knot に似ていて, $\overline{\mathbb{C}P}^2$ はそれをほどくための特異点解消の blow-up に相当する.）

４次元多様体のエキゾチック対を作るための操作「対数変換」は, blow-ups ＋有理 blow-down に置き換えることができる．「有理 blow-down」は, レンズ空間 $L(p^2, p-1)$ が bound する C_p (連分数展開による負定値な Plumbing) を, 特定の有理ホモロジー球体 B_p に置き換える操作である．Park 氏はその拡張変種「Park の有理 blow-down」を定義した．(p, q) を互いに素で $0 < q < p$ をみたす自然数の組とする．レンズ空間 $L(p^2, pq-1)$ が自然に bound する負定値な Plumbing $C_{p,q}$ を有理ホモロジー球体 $W_{p,q}$（通例の記号は $B_{p,q}$）に置き換える操作である．$q = 1$ の場合が元の有理 blow-down である．「Park の有理 blow-down」によってエキゾチック $\mathbb{C}P^2\sharp 5\overline{\mathbb{C}P}^2$ が構成された (Park–Stipsicz–Szabó). ここで, 有理ホモロジー球体 $W_{p,q}$ の存在は Casson–Harer が指摘している．しかし, その diagram は考察されず唯一性も話題にされなかった．（境界が指定されたレンズ空間 $L(p^2, pq-1)$ で 0-,1-2-ハンドルが 1 個づつの４次元多様体, との制限があれば 1 つに決まるだろうと考えられた？）

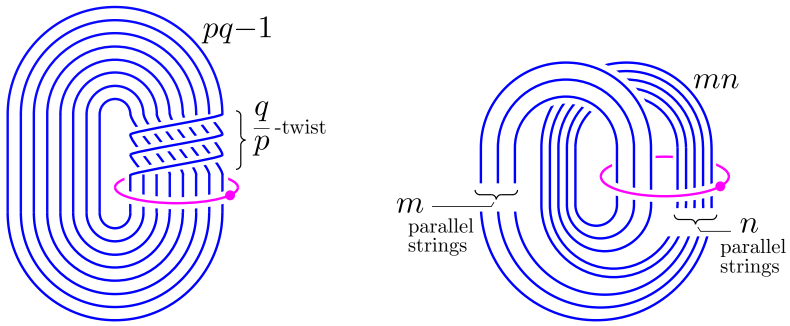

図 2: 絡み目 $B_{p,q}$（左 $B_{8,3}$）と $A_{m,n}$（右 $A_{3,5}$）, $\partial W_{8,3} = L(64, 23)$

同一の有理ホモロジー球面を表す２つの絡み目.（近況報告を兼ねて） 2007 年, 筆者は Park 氏 の集中講義を聞いた．彼の $W_{p,q}$ の発想は「T 型の有理 Gorenstein 特異点」に由来するとのことだった．その帰納的な定義は「毎回左か右かを選ぶ」を含んでいて (2)KG1F のレンズ空間手術の構造と似ていることに気がつき, $W_{p,q}$ を表す自画自賛の２成分 diagram $A_{m,n}$ を描いて Arxiv に投稿した (図 2 右). (m, n) は (p, q) からユークリッド互除法を経由して求まる：$(m, n) = A(p, q)$. その後, いくつかの論文と何人かの指摘で, それとは見かけの異なる diagram $B_{p,q}$ を知った (図 2 左). それで

問．この２つの diagram $A_{m,n}$, $B_{p,q}$ が表す有理ホモロジー球体は 可微分同相なのか

という問題に至った [門上-Y]. 6 年半経った今年 2014 年 6 月, Luke William 氏が, この２つの有理ホモロジー球体が可微分同相であることを報告している [W]. 最終的には Kirby calculus で示しているが, その前に 両者が Stein 構造をもつことを図示し, 境界の接触構造の不変量を調べて calculus のヒントを得る手法が取られている.

3　研究成果, 主結果

過去１０数年間の筆者の研究成果は, 次のようにまとめることができる.

研究成果 ([Y1,Y2 等]) レンズ空間手術をもつ Berge の結び目がすべてディバイド結び目であることを個別に観察して示した. 第８族以外の結び目については平面曲線表示も求めた. いずれも斜め 45 度に傾けた格子から切り出した形の曲線で表示できる. 面積と手術係数の間の公式も求めた. □

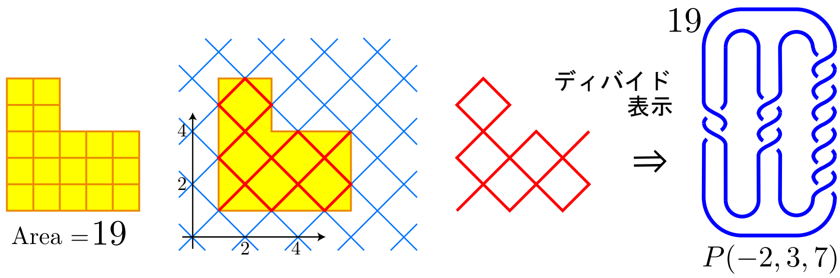

図 3: レンズ空間手術 ($P(-2,3,7);19$) のディバイド表示

これは, 結び目の Braid 表示や構成法をもとに個別に観察したものなので, 本質（なぜディバイド結び目になるのか, しかも特徴的な形の曲線なのか）は未だ掴めてはいない. そのことは保留したままであるが, 今回報告したい結果（の一部）は次の通り.

定理：(p,q) を互いに素で $0<q<p$ をみたす自然数の組とする. 同一の有理ホモロジー４球体 $W_{p,q}$ を表す, 異なる２つの２成分絡み目 $B_{p,q}$ と $A_{m,n}$ は, いずれもディバイド絡み目である. □

展望　「ディバイド結び目, 絡み目の例外的デーン手術を考察せよ」が 今後の課題です.

参考文献

[A] N A'Campo, *Le groupe de monodromie du déploiement des singularité isolées de coubes planes I*, Math. Ann. **213** (1975), 1–32.

[GHY] H Goda, M Hirasawa and Y Yamada, *Lissajous curves as A'Campo divides, torus knots and their fiber surfaces*, *Tokyo J. Math.* **25** No.2 (2002) 485–491.

[Gr] J E Greene, *The lens space realization problem*, Ann. of Math. (2) **177** (2013), no. 2, 449–511.

[KY] T Kadokami and Y Yamada, *Lens space surgeries along certain 2-component links related with Park's rational blow down, and Reidemeister-Turaev torsion*, J. Aust. Math. Soc. **96** (2014), no. 1, 78–126.

[Y1] Y Yamada, *Berge's knots in the fiber surfaces of genus one, lens spaces and framed links*, J. of Knot Theory and its Ramifications **14** No.2 (2005), 177–188.

[Y3] Y Yamada, *Lens space surgeries as A'Campo's divide knots*, Algebraic & Geometric Topology **9** (2009) 397–428.

[W] L Williams, *On handlebody structures of rational balls*, `ArXiv:math.GT1406.1575`.