ON HOMOLOGY 3-SPHERES DEFINED BY TWO KNOTS

MASATSUNA TSUCHIYA

Dedicated to Professor Yukio Matsumoto on the occasion of his 70-th birthday.

1. 序

K_1, K_2 を 3 次元球面内の結び目とする. $X_n(K_1, K_2)$ を Figure 1.1 のハンドル分解の図式をもつ 4 次元ハンドル体として, $M_n(K_1, K_2)$ を $X_n(K_1, K_2)$ の境界の 3 次元多様体とする.

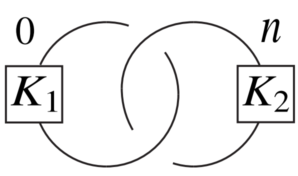


Figure 1.1. $X_n(K_1, K_2)$

注意. $M_n(K_1, K_2)$ はホモロジー 3 球面である.

K_1, K_2 が right handed trefoil knot (以後 RHT とかく) のとき, 松本幸夫 先生が 1978 年, Kirby の問題集 [5] で $M_0(RHT, RHT)$ は, ある可縮な 4 次元多様体の境界になるか? という問題をだした. n が奇数のときは, Gordon 氏 [3] の結果より, $M_n(RHT, RHT)$ は任意の可縮な 4 次元多様体の境界にならないことが示せる (see [8] §3.1.). 1984 年に円山憲子 氏が [7] で $M_6(RHT, RHT)$ は, ある可縮な 4 次元多様体の境界になることを示した. その後, 1997 年に S. Akbulut 氏が [1] で $M_0(RHT, RHT)$ は, 任意の可縮な 4 次元多様体の境界にならないことを Donaldson 氏の Theorem-C を用いて示し, 2013 年に丹下基生 氏が [10] で $n < 2$ のとき $M_n(RHT, RHT)$ は任意の可縮な 4 次元多様体の境界にならないことを correction term の計算によって示した.

本稿では K_1 を left handed trefoil knot (以後 LHT とかく) として, K_2 を LHT と 3 次元球面 S^3 内の結び目 K との連結和 $LHT\sharp K$ としたときに得られた成果について紹介する.

2. 研究成果

3 次元球面 S^3 内の結び目 K を Figure 2.1 で表すことにする. このとき $X_n(LHT, LHT\sharp K)$ のハンドル分解の図式は Figure 2.2 で表される. 例えば K が RHT のとき, Figure 2.1, 2.2 はそれぞれ, Figure 2.3, 2.4 のようになる.

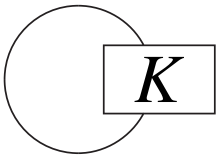


FIGURE 2.1. 結び目 K

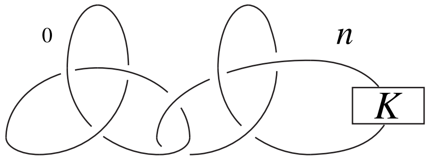


FIGURE 2.2. $X_n(LHT, LHT\sharp K)$

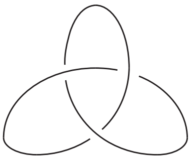


FIGURE 2.3. K が RHT のとき

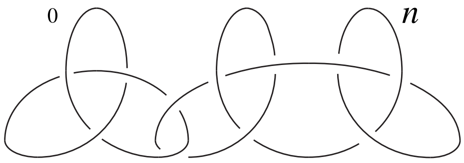


FIGURE 2.4. $X_n(LHT, LHT\sharp RHT)$

また, $D_-(K,n)$ (resp. $D_+(K,n)$) を結び目 K の negative (resp. positive) n-twisted Whitehead double とし, $D_-(K,n)$ を Figure 2.5 のように表すことにする. 例えば, $D_-(LHT,-6)$ は Figure 2.7 のようになる.

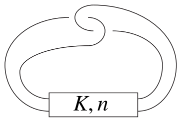


FIGURE 2.5. $D_-(K,n)$

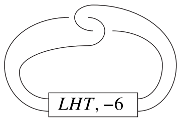


FIGURE 2.6. $D_-(LHT,-6)$

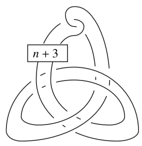


FIGURE 2.7. $D_-(LHT,-6)$

$M_n(K_1, K_2)$ について次の事実 2.1 が成り立つことが知られている.

事実 2.1 (see [3], Corollary 3.1.1)**.** もし K_1 がスライス結び目なら $M_n(K_1, K_2)$ は, ある可縮な 4 次元多様体の境界になる.

事実 2.1 の可縮な 4 次元多様体は, $X_n(K_1, K_2)$ において, スライス結び目 K_1 を境界とする 0-ハンドル内の滑らかな 2 次元円盤 D^2 と 2-ハンドルの core である D^2 とで得られる 0-framing の滑らかな 2 次元球面 S^2 を手術して得られる多様体である. K_1 がスライス結び目のときに, 事実 2.1 で得られる可縮な 4 次元多様体を Figure 2.8 で表すことにする. 正確なハンドル分解の図式の表し方は, 例えば [2] などを参照されたい.

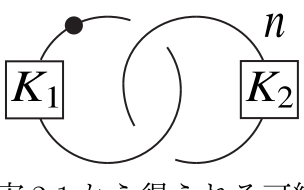


FIGURE 2.8. 事実 2.1 から得られる可縮な 4 次元多様体

$X_n(K_1, K_2)$ について次の定理 2.2 が示せる.

定理 2.2. $X_m(D_-(K_1,n),K_2)$ は, $X_n(D_-(K_2,m),K_1)$ と境界微分同相である.

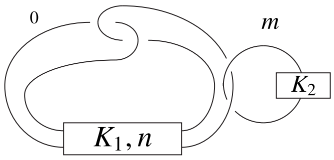


FIGURE 2.9. $X_m(D_-(K_1,n),K_2)$

$\cong_\partial$

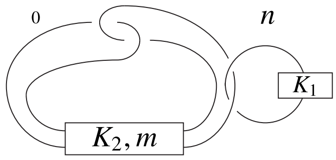


FIGURE 2.10. $X_n(D_-(K_2,m),K_1)$

とくに, LHT が Figure 2.12 で表されることに注意すると, 次の系 2.3 が示せる.

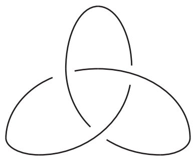
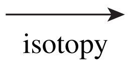


FIGURE 2.11



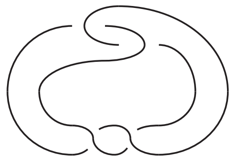


FIGURE 2.12

系 2.3. $X_n(LHT, LHT\sharp K)$ は *Figure 2.14, 2.15* で表される 4 次元ハンドル体とそれぞれ境界微分同相である.

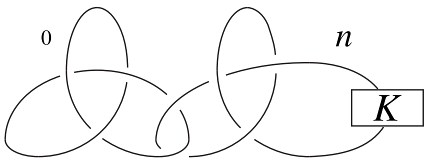


FIGURE 2.13. $X_n(LHT, LHT\sharp K)$

$\cong_\partial$

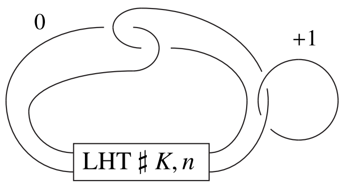


FIGURE 2.14

$\cong_\partial$

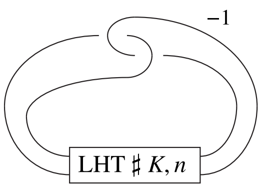


FIGURE 2.15

系 2.4. n が奇数のときには, $M_n(LHT, LHT\sharp K)$ は任意の可縮な 4 次元多様体の境界にならない.

注意. 系 2.4 は 系 2.3 の Figure 2.15 から Casson 不変量の計算により示せる.

注意. もし $D_-(LHT\sharp K, n)$ がスライス結び目ならば $M_n(LHT, LHT\sharp K)$ は事実 2.1 より，ある可縮な 4 次元多様体 $W_n(K)$ の境界になる．とくに K が unknot (以後 U とかく) のとき，$D_-(LHT, -6)$ はスライス結び目であることが知られている (Casson 氏の結果)．よって $M_{-6}(LHT, LHT)$ は，Figure 2.16 で表されるある可縮な 4 次元多様体 $W_{-6}(\mathrm{U})$ の境界になる．

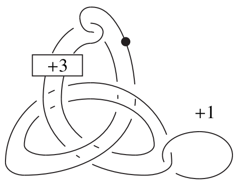


FIGURE 2.16. $W_{-6}(\mathrm{U})$

次に，$Y_n(K)$ を Figure 2.17 のハンドル分解の図式で表される 4 次元ハンドル体とする．$Y_n(K)$ の交点形式は $2E_8 \oplus 3\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right) \oplus 1$ である．

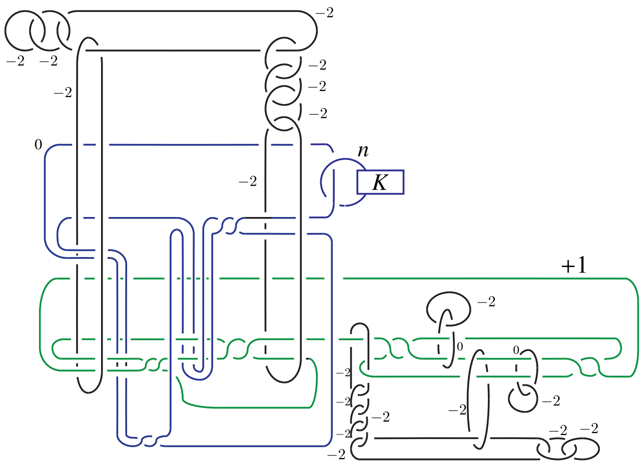


FIGURE 2.17. $Y_n(K)$

ここで Figure 2.17 の +1-framing の結び目はスライス結び目 $(RHT\sharp LHT)$ であることに注意すると blow down できるので，新たに $Y_n(K)$ と境界微分同相で，交点形式が $2E_8 \oplus 3\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ である単連結な境界付き 4 次元多様体 $Z_n(K)$ を得る．$Z_n(K)$ のハンドル分解の図式を Figure 2.18 で表すことにする．

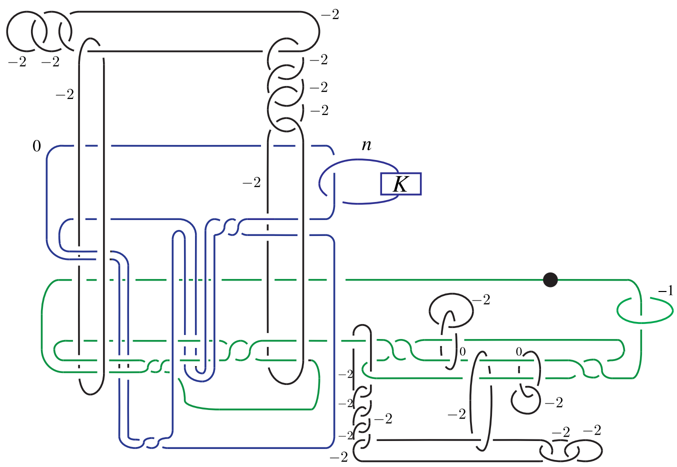


FIGURE 2.18. $Z_n(K)$

$N_n(K)$ を $Z_n(K)$ の境界の 3 次元多様体とすると次の定理 2.5 が示せる.

定理 2.5. $M_n(LHT, LHT\sharp K)$ と $N_n(K)$ は微分同相である.

系 2.6. もし $M_n(LHT, LHT\sharp K)$ が, ある可縮な 4 次元多様体 $W_n(K)$ の境界になれば, その可縮な 4 次元多様体 $W_n(K)$ と $Z_n(K)$ から, $K3$ 曲面とホモトピー同値である滑らかな 4 次元閉多様体 $Z_n(K) \cup_\partial (-W_n(K))$ が得られる.

実際に得られるホモトピー $K3$ 曲面を紹介する.

1 つめは, 結び目 K が U のとき $M_{-6}(LHT, LHT)$ が, ある可縮な 4 次元多様体 $W_{-6}(\mathrm{U})$ の境界になることから得られる $Z_0(RHT) \cup_\partial (-W_{-6}(\mathrm{U}))$ である.

2 つめは, $LHT\sharp RHT$ はスライス結び目であるので, $M_0(LHT, LHT\sharp RHT)$ が, 事実 2.1 からある可縮な 4 次元多様体 $W_0(RHT)$ の境界になることから得られる, $Z_0(RHT) \cup_\partial (-W_0(RHT))$ である.

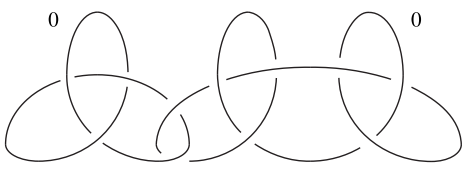


FIGURE 2.19. $X_0(LHT, LHT\sharp RHT)$

$\stackrel{\partial}{\cong}$

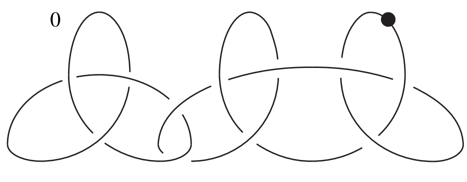


FIGURE 2.20. $W_0(RHT)$

また, 系 2.3 を使うと $X_0(LHT, LHT\sharp RHT)$ は, Figure 2.22 で表される 4 次元ハンドル体と境界微分同相であることが分かる.

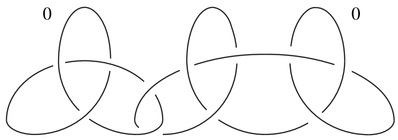


Figure 2.21. $X_0(LHT, LHT\sharp RHT)$

$\overset{\partial}{\cong}$

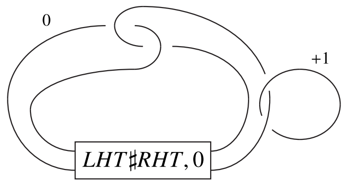


Figure 2.22. $X_{+1}(D_-(LHT\sharp RHT, 0)$,U)

$D_-(LHT\sharp RHT, 0)$ がスライス結び目であることと, 事実 2.1 から, Figure 2.23 で表される可縮な 4 次元多様体 $W_0'(RHT)$ が得られる.

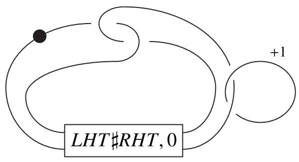


Figure 2.23. $W_0'(RHT)$

よって, ホモトピー $K3$ 曲面 $Z_0(RHT) \cup_\partial (-W_0'(RHT))$ が得られる.

さらに, $Y_n(K)$ は Figure 2.24 で表される 4 次元ハンドル体 $Y_n'(K)$ と境界微分同相であることが示せる. $Y_n'(K)$ の交点形式も $2E_8 \oplus 3\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \oplus 1$ である. ここでも, +1-framing の結び目はスライス結び目 (2 つの figure eight knot の連結和) であることに注意すると, blow down できて, $Y_n'(K)$ と境界微分同相で, Figure 2.25 で表される交点形式が $2E_8 \oplus 3\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ である単連結な 4 次元多様体 $Z_n'(K)$ が得られる.

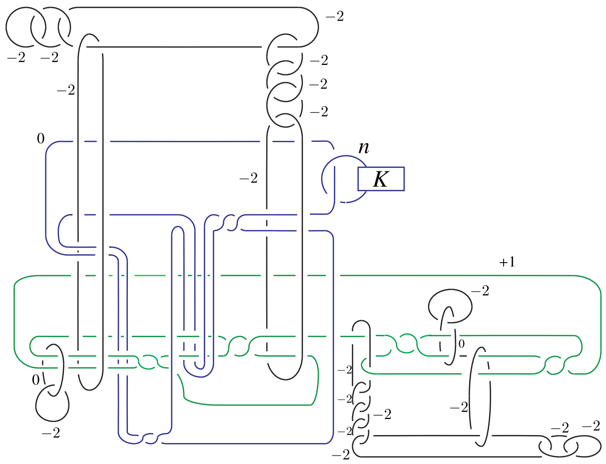


Figure 2.24. $Y_n'(K)$

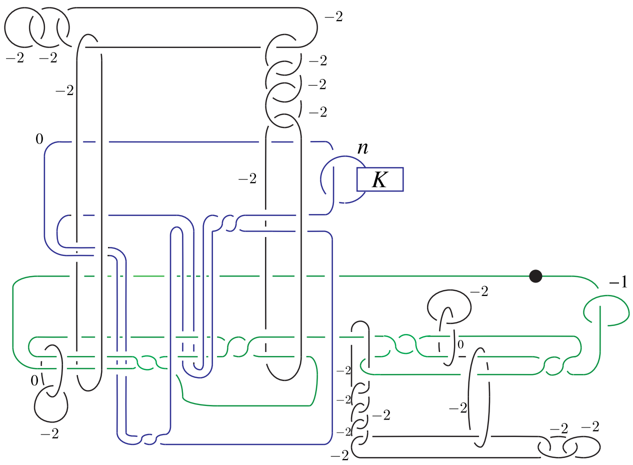


Figure 2.25. $Z'_n(K)$

このことから, ホモトピー $K3$ 曲面 $Z'_0(RHT) \cup_\partial (-W_0(RHT))$, $Z'_0(RHT) \cup_\partial (-W'_0(RHT))$ がそれぞれ得られる.

次に, adjunction 不等式を用いて得られた結果について紹介する. $K3$ 曲面とホモトピー同値である滑らかな 4 次元閉多様体は, 以下の adjunction 不等式を満たすことが知られている.

事実 2.7 (see [9], Cor 1.2.)**.** X を $K3$ 曲面とホモトピー同値な 4 次元閉多様体とする. 任意の $x \in H_2(X, \mathbb{Z}), x \neq 0, x \cdot x \geq 0,$ に対して, $g(x)$ を x によって実現される滑らかに埋め込まれたリーマン面の最小の種数とすると

$$2g(x) - 2 \geq x \cdot x$$

が成り立つ.

$g_4(K)$ を結び目 K の 4-ball genus とすると, 事実 2.7 から次の定理が示せる.

定理 2.8. $n > 2g_4(K) - 2$ のとき, $M_n(LHT, LHT \sharp K)$ は可縮な 4 次元多様体の境界にならない.

系 2.9. $D_-(LHT \sharp K, n)$ は, $n > 2g_4(K) - 2$ のときスライス結び目にならない.

注意. K を unknot としたとき定理 2.8 は, 丹下基生 氏が [10] で Heegaard Floer homology の correction term を計算することで $n > -2$ のとき, $M_n(LHT, LHT)$ は可縮な 4 次元多様体の境界にならないことを示したことの, adjunction 不等式による別証明になっている.

注意. 系 2.9 は K がスライス結び目のとき, M. Hedden 氏が [4] で示した結び目 K の Whitehead double における τ 不変量の公式から得られる結果と一致する.

3. 補足 (その他)

K_1 が figure eight knot (以後 4_1 とかく) や $(s, s+1)$-torus knot (以後 $T_{s,s+1}$ とかく) のときに得られる結果について紹介する.

注意. $T_{2,3}$ が RHT になるようにとることにする.

次の事実がある.

事実 3.1 (see [6] Lemma4)**.** $D_+(T_{s,s+1}, s(s+1))$ はスライス結び目である.

K_1 を 4_1 として, K_2 を $T_{s,s+1}$ とする. Figure 3.4, 3.6 で表される 4 元次ハンドル体をそれぞれ X, W とする. 事実 2.1, 3.1 から W は可縮な 4 次元多様体であることと, 4_1 は Figure 3.2 でも表されることに注意しておく. 定理 2.2 と同様の操作をすることにより. Figure 3.3, 3.4, 3.5, 3.6 で表される 4 次元ハンドル体はそれぞれ境界微分同相であることが示せる.

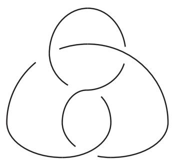
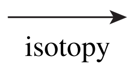


Figure 3.1



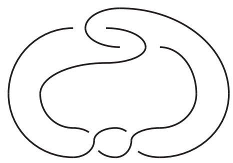


Figure 3.2

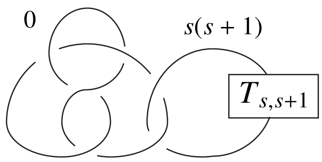


Figure 3.3. $X_{s(s+1)}(4_1, T_{s,s+1})$

$\overset{\partial}{\cong}$

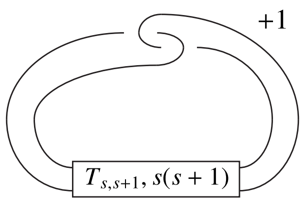


Figure 3.4. X

$\overset{\partial}{\cong}$

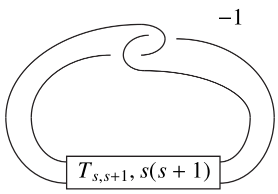


Figure 3.5

$\overset{\partial}{\cong}$

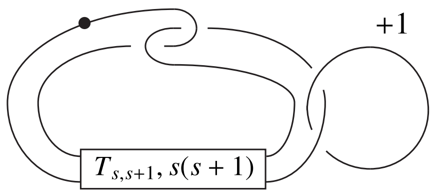


Figure 3.6. W

注意. $X \cup_\partial (-W)$ はホモトピー $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ である.

注意. Figure 3.4 で表される結び目 ($D_-(T_{s,s+1}, s(s+1))$) は一般にはスライス結び目ではない.

次に, K_1 を $T_{s,s+1}$ としたときに得られる結果を紹介する. 事実 2.1, 3.1 を使って得られる, Figure 3.7, 3.10 で表される可縮な 4 次元多様体をそれぞれ W_1, W_2 とする. 定理 2.2 と 事実 3.1 より, Figure 3.7, 3.8, 3.9, 3.10 で表される 4 次元ハンドル体はそれぞれ境界微分同相である.

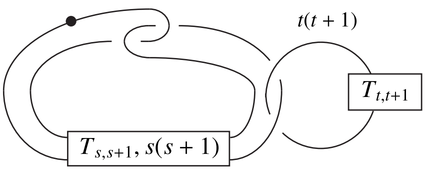


FIGURE 3.7. W_1

$\overset{\partial}{\cong}$

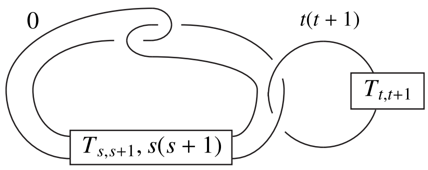


FIGURE 3.8. $X_{t(t+1)}(D_+(T_{s,s+1}, s(s+1)), T_{t,t+1})$

$\overset{\partial}{\cong}$

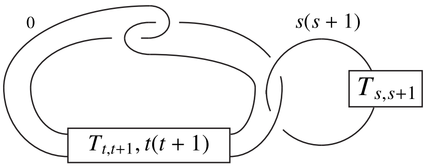


FIGURE 3.9. $X_{s(s+1)}(D_+(T_{t,t+1}, t(t+1)), T_{s,s+1})$

$\overset{\partial}{\cong}$

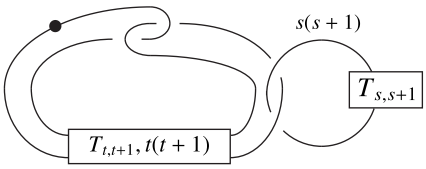


FIGURE 3.10. W_2

注意. $W_1 \cup_\partial (-W_2)$ は, ホモトピー S^4 である.

また, 定理 2.2 と同様の操作をすると Figure 3.8 で表される 4 次元ハンドル体 $X_{t(t+1)}(D_+(T_{s,s+1}, s(s+1)), T_{t,t+1})$ は Figure 3.11 で表される 4 次元ハンドル体 V と境界微分同相であることが示せる.

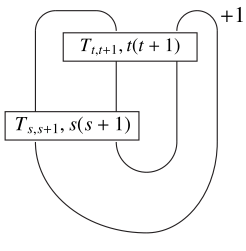


FIGURE 3.11. V

よって, $V \cup_\partial (-W_1)$, $V \cup_\partial (-W_2)$ はそれぞれホモトピー $\mathbb{C}P^2$ であることが分かる.

同様にすると, もし $D_+(K_1, n)$ がスライス結び目ならば, Figure 3.12 で表される可縮な 4 次元多様体 W' が得られて, W' と Figure 3.13 で表される 4 次元多様体 V' が境界微分同相であることが示せるので, $V' \cup_\partial (-W')$ がホモトピー $\mathbb{C}P^2$ であることが示せる.

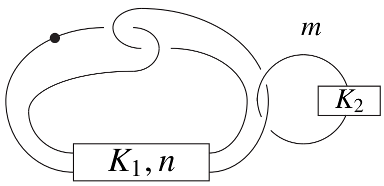


FIGURE 3.12. W'

$\overset{\partial}{\cong}$

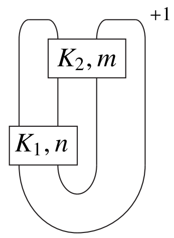


FIGURE 3.13. V'

参考文献

[1] S. Akbulut, *A note on a homology sphere*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 625-628.

[2] R. Gompf and A. Stipsicz, 4-manifolds and Kirby calculus, Graduate Studies in Mathematics, 20. American Mathematical Society, 1999. ISBN: 0-8218-0994-6

[3] C. McA. Gordon, *Knots, homology spheres, and contractible* 4*-manifolds*, Topology **14** (1975), 151-172.

[4] M. Hedden, *Knot Floer homology of Whitehead doubles*, Geom. Topol. **11** (2007), 2277-2338

[5] R. C. Kirby, Problems in Low Dimensional Manifold Theory, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **32** (1978), 273-312

[6] R. A. Litherland, *Slicing doubles of knots in homology 3-spheres*, Inv. Math. **54** (1979), 69-74

[7] N. Maruyama, *Knot surgery descriptions of some closed oriented* 3*-manifolds*, Journal of Tsuda College **16** (1984), 1-14.

[8] Y. Matsumoto, *On the bounding genus of homology 3-spheres*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **29** (1982), 287-318.

[9] J. W. Morgan, Z. Szabó, *Homotopy K3 surfaces and mod 2 Seiberg-Witten invariants*, Math. Res. Lett. 4 (1997), no. 1, 17—21.

[10] M. Tange, *Heegaard Floer homology of Matsumoto's manifolds*, `http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/MatsumotoM.pdf`

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, GAKUSHUIN UNIVERSITY, 5-1, MEJIRO 1-CHOME, TOSHIMA-KU, TOKYO, 171-8588, JAPAN

E-mail address: `tsuchiya@math.gakushuin.ac.jp`