Bordered Floer Homology and Torelli elements

松田 浩 (山形大学 理学部)

松本 幸夫 先生の古稀＋１をお祝いして

閉３次元多様体 Y の Heegaard 分解を使って Ozsváth 氏と Szabó 氏は Y の不変量, Heegaard Floer ホモロジー $HF(Y)$, を構成しました。この不変量は Y の Seiberg-Witten-Floer ホモロジーと呼ばれる不変量と同型であると予想されていました。Colin 氏, Ghiggini 氏, Honda 氏のグループと Kutluhan 氏, Lee 氏, Taubes 氏のグループは独立に, どちらも Hutchings 氏が構成した Embedded Contact ホモロジーと呼ばれる不変量を経由して, この予想を解決しました。

十分複雑な閉４次元多様体 X を, X の中にある閉３次元多様体 Y で切り, $HF(Y)$ と X のハンドル分解を使って Ozsváth 氏と Szabó 氏は X の不変量 Φ_X を構成しました。この不変量は X の Seiberg-Witten 不変量に一致すると予想されています。

一般に X の Seiberg-Witten 不変量を計算することは難しいと言われています。X の不変量 Φ_X については Lipshitz 氏, Manolescu 氏, Wang 氏のグループや Manolescu 氏, Ozsváth 氏, Thurston 氏のグループが, X のハンドル分解を Kirby 図式を使って描くことで 実際に計算する手法を開発しました。しかし 問題点があります。Φ_X を計算するためには, X を切る時に使う Y の不変量 $HF(Y)$ を知る必要があります。Sarkar 氏, Wang 氏は Y の良い Heegaard 図式を描くことで, Manolescu 氏, Ozsváth 氏, Thurston 氏は Y を表す Kirby 図式を使うことで $HF(Y)$ を計算する手法を開発しました。ところが 計算量の問題などから実用的とまでは言えませんでした。

そこで $HF(Y)$ を計算する新たな手法の１つとして Lipshitz 氏, Ozsváth 氏, Thurston 氏は境界付き３次元多様体に対して Bordered Floer ホモロジーと呼ばれる不変量を構成しました。Heegaard Floer 理論では Y の Heegaard 分解を使い １枚の曲面, Heegaard 曲面, に集まる情報から $HF(Y)$ の情報を取り出していました。Bordered Floer 理論では１枚の Heegaard 曲面に集

まっていた情報をたくさんの (Heegaard 曲面)$\times I$ に分散させ, 両端のハンドル体を除く各ピースには Dehn ツイストの情報だけを持たせました。(下図参照)

両端のハンドル体と真中の (Heegaard 曲面)$\times I$ を境界付き 3 次元多様体とみて, Bordered Floer 理論において構成された各ピースの不変量 (加群) を計算し, これらの加群を掛け合わせると 元の閉 3 次元多様体 Y の $HF(Y)$ を計算できることが示されました。

ここで 真中にあるピースの 1 つを見てみます。すると φ の情報を持った (Heegaard 曲面 S)$\times I$ から構成される不変量 (加群) は 写像類群の元 φ の不変量を与えていることが分かります。
本講演では $H_1(S)$ への自然な作用が自明な φ について この加群の具体的な計算を紹介します。