2026 年 11 月 11 日
第 1 版 (2026 年 11 月 11 日)

数理ランチタイム「私と数学」

数学のリアリティ

河澄 響矢
大学院数理科学研究科

数学に限らず一般的に、学問というものは何かを言明している。その言明が「虚しいデタラメ」ではないこと、裏返せば「リアル」であること、はどうやって保証されるのだろうか？「数学のリアリティ」というタイトルのもとでこのことを考えて見たい。

こう言うと反発する人がいるかもしれないが、定義-定理-証明の連鎖が (西洋) 数学の言明の基本である。

> 私が数学者であることを知る遠い親戚から「日本には和算という立派なものがあったのに、なぜ西洋の数学をしなければならなかったのか？」と聞かれたことがある。その親戚はイギリスで駐在員をしたことがあるので「西洋の建物は石造りで縦に大きいが、日本は平屋で横に広がっていく。西洋の数学は定義-定理-証明という石を一つづつ積み上げていくので縦に大きい建物ができるが、それ以外の数学はその部分が弱かったので縦に大きい建物を建てるのは難しかった。」と答えたら分かってもらえたように思う。

もちろん論理が破綻していては完全なデタラメである。仮定に矛盾が混ざっていれば任意の命題が導かれる。

> このことを復習しておく。命題 A とその否定 $\neg A$ がともに仮定されているとする。B を任意の命題とする。このとき A がなりたっているから $A \vee B$ もなりたつが、後者は $(\neg(\neg A)) \vee B$ つまり $(\neg A) \Rightarrow B$ を意味する。 $\neg A$ も仮定されているから B がえられる。

しかし、論理的に完璧であれば、その数学は「リアル」であろうか？論理式を正しく組み合わせたものは、すべて「リアル」な数学か？と聞かれて、肯定的に答えるには蛮勇が必要である。今回の講演で何度か引用する

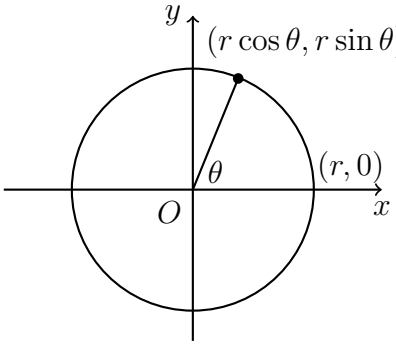
> [小平]: 小平 邦彦「数学の印象」(岩波現代文庫「怠け数学者の記」pp.6-19)

に適切な文章があったので引用しておく。

> もちろん数学は論理に従わなければならない。しかし数学における論理の役割は、文学における文法のようなものであろう。文法にあった文章を書くこととそれをつなぎあわせて小説を書くことは全然別な問題であるがごとく、論理的に正しい推論をすることとそれを積みかさねて数学の理論を構成することとはまったく次元の違う問題である。([小平] p.6)

このあとの小平先生の議論が「数学のリアリティ」に直接関わるのだが、後回しにして、少しここで立ち止まって考えたい。数学では問題を解くことが否応なく重要な役割を果たす。たとえば「○○予想」という名前のついた難問が多くある。トポロジーでは Poincaré 予想が有名で、4 次元微分可能多様体についてだけ未解決で残っている。高次元も含めた Poincaré 予想とは、ホモトピーという粗い意味で球面と「同じ」多様体は、位相的ないし微分位相的という精しい意味で球面と「同じ」か？と言う問題である。多様体というのは局所的には（目を近づけて見ると）前期課程の多変数微積分でててくる Euclid 空間の開集合の構造をもった空間のことである。局所的には違いのないものが大域的には（全体像を見ると）違ってくるのが面白い。

局所と大域の違いとして、前期課程の授業を担当するたびに説明していることを書いておく。2 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^2$ から原点 $O(0,0)$ を取り除いた開集合 $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ の上で平面極座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を考える。



このとき

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2} \,(=: P(x,y))$$
$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} \,(=: Q(x,y))$$

となる[1]。$P(x,y)$ と $Q(x,y)$ は可積分条件 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ をみたすから、偏微分方程式

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y)$$

をみたす微分可能な函数 $F = F(x,y)$（つまり P, Q の「原始函数」F）は「局所的に」存在する。もちろん $F = \theta$ ととればよい。しかし、角度 θ を「大域的に」 $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ 全体で連続に定義することはできない。（通常、角度を定義するために切れ目を入れていることを思い出す。）これは原点 O に「穴が開いている」というトポロジーの反映である。

トポロジーは多様体の大域的な状況つまり全体像を問題にして研究する。多様体を大域的に分類することが大きな問題である。分類するための尺度として、ホモトピーという粗い

[1] Jacobi 行列で計算するべきだが、以下のようなズルもできる: $\tan\theta = y/x$ の両辺を x で偏微分して $(1+\tan^2\theta)\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2}$ となるので、これを整理すればよい。$\dfrac{\partial\theta}{\partial y}$ も同様である。

けれども記述しやすい尺度と、同相的ないし微分同相的という精しいが記述しにくい尺度のズレが問題になる。球面は多様体のなかで最も簡単なものの一つである。最も簡単かつ最も根本的なところで尺度のズレを問題にしているのが Poincaré 予想である。このように、 Poincaré 予想は単なる難問ではなく、多様体の分類という数学的現象に関わる課題が背景の文脈としてある。([小平] p.7, 「数学とは自然現象のなかの数学的現象を研究する学問であると思う。」)

つまり、問題に対しても「リアリティ」の有無が問われる。したがって、ただ難問があって、それに取り組めばよい、解ければなおのことよい、というのではない。なぜその問題を考えるのか？ということ、つまり、問題の背景にある数学的課題を理解することが学問としての数学にとって不可欠である。背景にある文脈から切り離されるものではない。問題は、解決するより提出する方が重要である、というのは数学ではよく言われる[2]。「○○予想」と名のつく問題の多くは、研究を具体的に進めているうちに、こうだったらよいのにと期待するのだが、それがなかなか証明できない、という状況を表している。背景の文脈にある具体的な研究なしに問題だけ切り離しては価値が減じる。同じ理由から、研究が不充分な状態で軽々しく予想を提出するべきではない。ただし、問題を明確に定式化することで研究の局面が変わることはあるから、とりあえず予想としてみることには一定の利点はある。

それでは [小平] の議論に戻る。先ほどの引用の直後に「だから数学は本質的に論理と異なると思う。(p.7)」とあって、小平先生の有名な「数覚」の議論が始まる。「数学のリアリティ」を支えるポイントとして以下の 3 つが [小平] から読み取れる。　なお、『』は私が付加した見出しである。

(a) 『理論の豊富さ』公理系は無矛盾であるだけでなく、豊富でなければならない。(p.17)

(b) 『応用のひろさ』しかし私には応用のない定理というのはどうも物足りないのである。(p.15)

(c) 『数学的現象の実在』数学の対象を自然現象の一部と考えるのはずいぶん乱暴であると言われるかも知れない。しかし数学的現象が物理現象と同様な厳然とした実在であることは、数学者が新しい定理を証明したとき、定理を「発明した」と言わず「発見した」というところに端的にあらわれていると思う。私もいくつか新しい定理を証明したが、決して定理を自分で考え出したとは思わない。前からそこにあった定理をたまたま私が見つけたのに過ぎないという感じがするのである。(pp.8-9)

まず、(a)『理論の豊富さ』は、(b) (c) 以下と異なり、「数学のリアリティ」が数学それ自身の展開で保証される、という意味で興味深い。 [小平] が強い説得力をもって述べており、そこに付け加えることは思い当たらない。

(b)『応用のひろさ』については、少し言いたいことがある。まず、普通に研究していれば新しいアイディアを思いつくことがある。しかし、そのアイディアが過去の問題の解明などに応用されなければ、他人には理解してもらえない。思いついた本人にとって悔しいこ

[2]たとえば、深谷賢治「数学者の視点」(岩波書店) 第 12 章「問題を解くこと、そして作ること」によく配慮された議論がある。配慮されているので、ここまで直裁には言っていない。

とだが現実である。一方で、他人の理解のために既存の文脈に位置付けることは必要である。一方で、「賞賛を受けるものに。— 君が他人から賞賛されているうちは、まあ、いつも信じたまえ、君はまだ君自身の軌道の上に立たず、他人の軌道の上に立っているだと[3]。」ということもある。さらに、15 年ほど経つとアイディアの価値が明らかになって評価される、ということもある。つぎに、具体的な対象が「数学のリアリティ」を支えているという意味でも、1985 年ごろ小松彦三郎先生が「これからは具体的なものを研究しなさい。」と我々学部 3 年生におっしゃっていたのを思い出す[4]。セミナーで定義や定理を紹介すると、「非自明で一番易しい例」を挙げるように質問されるのも広い意味で関係する。具体的なものから遊離すると研究が迷走することはしばしば体験することである。一方で、応用の「自然さ」「内在性」は重要である。文科省や大学当局が「分野の垣根を越える」「文理融合」を頻繁に語ることには浅薄さを感じている。分野横断的に「リアルな」研究を実行することの困難さ、その困難を乗り越えた研究に接したときの感動、そして困難から逃避することで発生する腐敗臭を、長年「数学史」の授業の世話人として体験してきたからである。

(c) 『数学的現象の実在』が私が一番言いたいことである。[小平] では物理学との関連で数学的現象の実在が説明されている。これが本筋の議論であろう。一方で、とくに幾何学では学習と研究を通して、数学的対象の実在を感じることが多い。かなり以前に提唱して現在休眠中の多様体愛護協会 `https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kawazumi/spcm.html` はその文脈にあり、微分可能多様体および複素多様体を生物のように痛みを感じる実在として捉えている。多様体は自己の延長ではなく他者であり、ピグマリオンが恋をした彫像とは違うと思っている。そのように思う理由は、大掴みの議論ではなく、証明や計算の細部を詰めるところにある。証明の議論を詳細に追っていくと、細部で思い違いをして辻褄があわなくなることがある。より頻繁には、計算間違いで矛盾した結果が出てしまう。これらを訂正する過程は対象を理解する上で重要である。さらに、実例に照らし合わせることで、議論が明らかになる。これらの過程から、考えている数学的対象が自己の延長でない他者であることを体験する[5]。自己の延長ではなく他者だからこそ「愛護」が問題になる[6]。

(b) (c) を通して言えるのは、「リアリティ」は「他者」との関係などの文脈を通して保証されるということである。表面的には (a) は自己完結しているように見えるが、実例や応用という「他者」との文脈なしに実際の数学の議論が展開することは考えられない。

人間のキャパシティには限界があるので、すべての文脈に配慮することは不可能である。そこで学習や研究において「これだけわかっていれば、他のことは知る必要がない」という囁きに屈してしまいがちである。仕方ないことではある。しかし、屈してしまう自分の弱さまで見失うとき、その人の学問の「リアリティ」も失われるのではないか。

---

[3] F. ニーチェ「人間的な、あまりに人間的な, II」第一部 さまざまな意見と箴言, 340 (中島義生訳, ちくま学芸文庫, p.229)

[4] この言葉は自分の研究人生に大きな影響があった。

[5] 「私は間違っている」と言うためには、私とは別に正しいものがなければならない。

[6] なお、定理の仮定はギリギリまで弱めるべき、というのは正しい主張である。一方、証明を簡略化したり議論を理解しやすくするために、仮定を付け加えることがある。たとえば、パラコンパクトでなりたつ主張をコンパクトに仮定を強めて証明する場合などである。これは多様体愛護とは別の問題に思われる。証明を改良したところで、コンパクト多様体がコンパクトでなくなることはないからである。