§1. 曲面上の交叉形式について

当面の講義の予定

$\boxed{\text{§1. 交叉形式}} \xrightarrow{\text{かんたんな例}} \boxed{\text{§2 homological Goldman Lie algebra}}$

$\boxed{\text{§1. 交叉形式}} \xrightarrow{\text{幾何的精密化}} \boxed{\text{§§3-5 Goldman Lie algebra}}$

$\boxed{\text{§§3-5 Goldman Lie algebra}} \downarrow \boxed{\text{§8. 主定理}} \Leftarrow \boxed{\text{§7 symplectic 展開}}$

$\boxed{\text{§1. 交叉形式}} \xrightarrow{\text{代数的精密化}} \boxed{\text{§6. symplectic 導分のLie代数}}$

今日やること
- 曲面上の交叉形式の幾何的な定義
- Poincaré双対定理の復習

参考書

[G]. W. Goldman. Invent. math. 85 (1986) pp 263-302

[H]. 服部晶夫「位相幾何学」岩波書店

交叉形式の幾何的な定義

manifold = C^∞ manifold

定理1.1. (cf. e.g., [G] p.291 Lemma 5.6)

M: 1-dim. closed manifold, S: 2-dim. mfd

(1) $\forall f: M \to S$ conti. map

$\exists \hat{f}: M \to S$ generic immersion

(immersion であって自己交叉は横断的二重点のみ)

s.t. $f \simeq \hat{f}: M \to S$

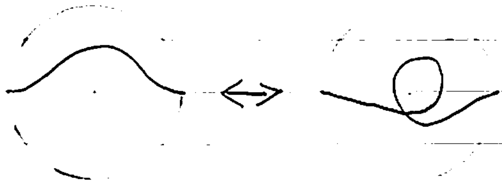
(2) $f, g: M \to S$ generic immersions

$f \simeq g: M \to S$ free homotopic

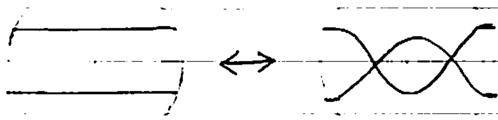
$\Longrightarrow$ $f = f_0, {}^{\exists}f_1, \dots, {}^{\exists}f_{k-1}, f_k = g$ generic immersions の列

各 f_{i-1} と f_i は次の3つの moves のいずれかでうつりあう

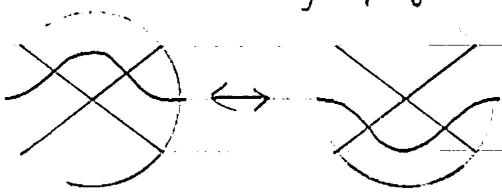
(ω1) monogon の生滅



(ω2) bigon の生滅



(ω3) 二重点のとびこえ jumping over a double point



surface = 2-dim. C^∞ mfd.

S : oriented surface.

$\hat{\pi} = \hat{\pi}(S) \overset{\text{def}}{=} [S^1, S] = \mathrm{Map}(S^1, S)/\text{free homotopic}$

$p \in S$, $|\ | : \pi_1(S, p) \to \hat{\pi}(S)$, $x \mapsto |x|$

基点を忘れる写像

(S : connected のとき. $p \in S$ について
$\hat{\pi}(S) = \pi_1(S, p)/\text{conj}$)

$\alpha, \beta \in \hat{\pi}$

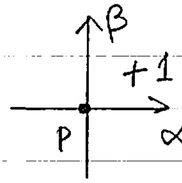
$\alpha \sqcup \beta : S^1 \sqcup S^1 \to S$ generic immersion となるように代表元をとる。
(∵ Thm 1.1.(1))

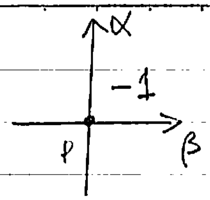
このとき $\#(\alpha \cap \beta) < \infty$ (∵ S^1 : compact)

(代数的) 交叉数 ((algebraic) intersection number)

$$\alpha \cdot \beta \overset{\text{def}}{=} \sum_{p \in \alpha \cap \beta} \varepsilon(p; \alpha, \beta) \in \mathbb{Z}$$

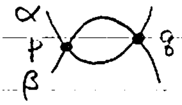
$\varepsilon(p; \alpha, \beta) = \pm 1$: local intersection number

右手系 

左手系 

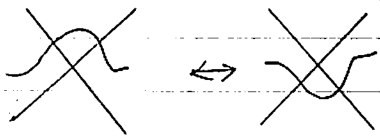
well-defined (ω1)〜(ω3)で交叉数が変わらないことをたしかめる.

(ω1) 影響なし

(ω2) 

4通りの向きの入れ方のいずれについても

$\varepsilon(p:\alpha,\beta) = -\varepsilon(q:\alpha,\beta)$

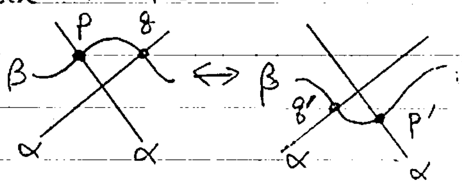
(ω3) 

3本のそれぞれがαか? βか? $\Rightarrow 2^3 = 8$通り

すべてαまたはすべてβのとき $\Rightarrow$ 影響なし.

のこり6通り 向きの入れ方 $2^3=8$通り　$6\times 8 = 48$通り

2種類に分かれる

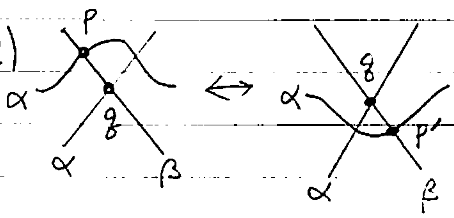
(その1) 

$2\times 8 = 16$通り

いずれの場合も

$\varepsilon(p:\alpha,\beta) = \varepsilon(p':\alpha,\beta)$

$\varepsilon(q,\alpha,\beta) = \varepsilon(q':\alpha,\beta)$

(その2) 

$4\times 8 = 32$通り

いずれの場合も

$\varepsilon(p:\alpha,\beta) = \varepsilon(p':\alpha,\beta)$

//

かくして 交叉形式

$\bullet : \hat{\pi}\times\hat{\pi} \to \mathbb{Z}$

が定義できた。次は明らか.

$\forall \varphi : S \to S$ ori. pres. diffeo

$\varphi(\alpha)\cdot\varphi(\beta) = \alpha\cdot\beta$

No.

Date

<u>補題1.2</u> 交叉形式は交代双線型写像

$$\cdot : H_1(S;\mathbb{Z}) \times H_1(S;\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

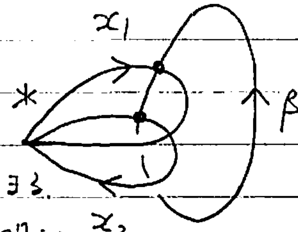
を定める.

<u>証明</u> S : conn. としてよい. $* \in S$ をとる.

$$H_1(S;\mathbb{Z}) = \pi_1(S,*)^{abel}$$

$\forall x_1, \forall x_2 \in \pi_1(S,*)$, $\forall \beta \in \hat{\pi}$

$$|x_1 x_2| \cdot \beta = |x_1| \cdot \beta + |x_2| \cdot \beta$$



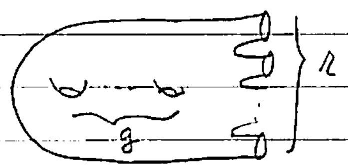
ゆえに homom $\cdot\beta : H_1(S;\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ が定まる.

交代性は $\varepsilon(p;\alpha,\beta) = -\varepsilon(p;\beta,\alpha)$ より明らか.

そこで homom $H_1(S;\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_1(S;\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$
$\beta \longmapsto \cdot\beta$ が定まる.

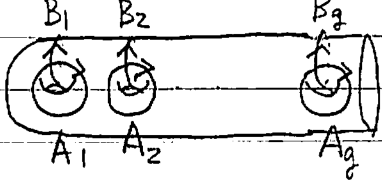
つまり $\cdot$ は双線型である //

<u>記号</u> $g, r \geq 0$

$\Sigma_{g,r} :=$ 

（注） $\#\pi_0(\partial\Sigma_{g,r}) = r$, $\chi(\Sigma_{g,r}) = 2-2g-r$ ）

<u>$g \geq 1$</u> $\Sigma = \Sigma_{g,1}$ の場合に考える.



$$H_{\mathbb{Z}} := H_1(\Sigma;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$$

$\{A_i, B_i\}_{i=1}^{g}$ は基底を与える.

$$A_i \cdot B_j = \delta_{ij} \quad A_i \cdot A_j = B_i \cdot B_j = 0 \quad (1 \leq {}^\forall i, {}^\forall j \leq g)$$

symplectic basis になっている

<u>補題1.3</u> $\Sigma = \Sigma_{g,1}$ について交叉形式は非退化である. つまり写像

$$\vartheta : H_{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_{\mathbb{Z}},\mathbb{Z}), \quad X \longmapsto (Y \longmapsto Y \cdot X)$$

は同型である.

証明 $\{A_i^*, B_i^*\} \subset \mathrm{Hom}(H_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$, $\{A_i, B_i\}$ の双対基

$\mathcal{D}:\ A_i \longmapsto -B_i^*$
$\quad\ \ B_i \longmapsto A_i^*$ これは同型 //

(注) $r \geq 2$ のとき $\Sigma_{g,r}$ の交叉形式は非退化ではない

$C_2 \neq 0 \in H_1(\Sigma_{g,2};\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2g+1}$
しかし $\forall X \in H_1(\Sigma_{g,2};\mathbb{Z})$ $X \cdot C_2 = 0$ //

Poincaré双対定理の復習

Kronecker積 \ とびこえ	$\langle c, h \rangle$	$\langle h, c \rangle$
気にする	Milnor	◎
無視する	Spanier	服部

(co)homology の符号は少なくとも4通りある.

X : top. sp.
Δ^n : standard n-simplex, $n \geq 0$.
$d_i : \Delta^{n-1} \to \Delta^n$, $0 \leq i \leq n$, the i-th face map
$S_*(X) = \{S_n(X), \partial\}$ singular chain complex
$$S_n(X) = \mathbb{Z}\,\mathrm{Conti}(\Delta^n, X) \quad n \geq 0$$
$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\sigma \circ d_i) \quad (\sigma \in \mathrm{Conti}(\Delta^n, X))$$
$S^*(X)$, $S^n(X) = \mathrm{Hom}(S_n(X), \mathbb{Z})$

Kronecker積
$$\langle c, u \rangle \overset{\mathrm{def}}{=} (-1)^{\deg u \deg c} u(c) \in \mathbb{Z} \quad (c \in S_*(X),\ u \in S^*(X))$$

Alexander-Whitney map
$$\Delta : S_*(X) \to S_*(X) \otimes S_*(X)$$
$$\Delta\sigma \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{p=0}^{n} \underbrace{(\sigma \circ d_n \circ \cdots \circ d_{p+1})}_{\text{front face}} \otimes \underbrace{(\sigma \circ d_{p-1} \circ \cdots \circ d_0)}_{\text{back face}} \quad (\sigma \in \mathrm{Conti}(\Delta^n, X))$$

Δ : 自然性をもつ

diagonal map $\Delta : X \to X \times X$, $x \mapsto (x, x)$, の近似.
($\rightsquigarrow$ coproduct の一種)

No.

Date

cup 積

$$\cup : S^*(X)\otimes S^*(X) \longrightarrow S^*(X)$$

$$u\otimes v \longmapsto (-1)^{\deg u \deg v}(u\otimes v)\circ\Delta$$

⇝ cohomology に移行すると次数可換になる

cap 積

$$\cap : S_*(X)\otimes S^*(X) \longrightarrow S_*(X)$$

$$c\otimes u \longmapsto (-1)^{\deg c \deg u}(u\otimes 1)(\Delta c)$$

$$\boxed{\langle c, u\cup v\rangle = \langle c\cap u, v\rangle}$$

⇝ すべては (co)homology に移行する.

さらに $A, B \subset X$ subspaces

$\{A, B\}$: 切除的 $\overset{\mathrm{def}}{\iff}$ $S_*(A)+S_*(B) \hookrightarrow S_*(A\cup B)$ (homotopy equivalence)

とすると

$$\cup : H^*(X,A)\otimes H^*(X,B) \longrightarrow H^*(X, A\cup B)$$

$$\cap : H_*(X, A\cup B)\otimes H^*(X,A) \longrightarrow H_*(X,B)$$

が定義できる.

Poincaré duality theorem $N\geq 0$.

X : compact oriented (topological) N-manifold

$A, B\subset \partial X$, ∂X のいくつかの連結成分の和

$A\cup B = \partial X$, $A\cap B = \phi$

$\Longrightarrow$

(1) $\exists ! [X]\in H_N(X,\partial X;\mathbb{Z})$ $\forall p\in X\setminus\partial X$ $j_{p*}[X]\in H_N(X, X\setminus\{p\};\mathbb{Z})$

基本類 (ただし $j_p : (X,\partial X)\hookrightarrow (X, X\setminus\{p\})$ incl.) 正の生成元

(2) $[X]\cap : H^*(X,A) \xrightarrow{\cong} H_{N-*}(X,B)$

(注) Poincaré duality は local system (局所定数層) でも成立つ

(cf. [服部] Bredon "Sheaf Theory" GTM)

交叉形式 $p+q=N$

$\cdot : H_p(X;\mathbb{Z}) \otimes H_q(X;\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$

$z \otimes w \longmapsto z\cdot w = \langle [X], ([X]\cap)^{-1}(z) \cup ([X]\cap)^{-1}(w) \rangle$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| $

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \langle z, ([X]\cap)^{-1} w \rangle$

$z\cdot w = (-1)^{pq} w\cdot z$

X が surface $(N=2)$ で $p=q=1$ のとき
前半でのべた交叉数に一致する．(cf. e.g. [服部])

この講義の内容

Goldman bracket
$\mathrm{Der}_\omega(\hat{T}) \curvearrowright \hat{T}$
$\mathrm{Der}_\omega(\hat{T})$ の bracket
⋮

これらすべてを "local system" の交叉形式として表す

Lie 代数準同型は
cap 積の自然性からわかる

No.

Date