幾何学 I　　第 9 回　　河澄響矢

今回の内容:

§6. vector 場と接束（後半）: 導分, Lie 代数, Lie 代数準同型, $C^\infty(M)$ とその導分.

§7. vector 場の積分曲線（前半）: 積分曲線, Lebesgue 数, $\mathrm{Exp}(tX)$, 微分同相の vector 場への作用.

§6. vector 場と接束（後半）

[導分と Lie 代数]

まず線型代数の一般的な議論を行う。V: 実ベクトル空間について

$$\mathrm{End}(V) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V) = \{a : V \to V;\ \text{実線型写像}\}$$

と表す。$a, b, c, \cdots \in \mathrm{End}(V)$ とする。写像の合成

$$\mathrm{End}(V) \times \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V), \quad (a, b) \mapsto ab := a \circ b : v \mapsto a(b(v)),$$

は、実双線型写像であり、**結合則**: $(ab)c = a(bc) \in \mathrm{End}(V)$ をみたす。**括弧積**（bracket）

$$[a, b] := ab - ba \in \mathrm{End}(V)$$

が定まる。これも (a, b) について実双線型である。

補題 6.11. $\forall a, \forall b, \forall c \in \mathrm{End}(V)$ について次がなりたつ。

(1) **歪対称性**（skew symmetric） $[a, b] = -[b, a]$.

(2) **Jacobi 律**（Jacobi identity） $[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0$.

証明. (1) 明らか。

(2) Leibniz' rule

$$[a, [b, c]] = [[a, b], c] + [b, [a, c]]$$

を示せばよい。歪対称性のもとで、上述の Jacobi 律はこれに同値だからである。

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= [a, b]c - c[a, b] + b[a, c] - [a, c]b \\ &= abc - \cancel{bac} - \cancel{cab} + cba + \cancel{bac} - bca - acb + \cancel{cab} \\ &= abc - acb - bca + cba = a[b, c] - [b, c]a = [a, [b, c]] = (\text{左辺})\end{aligned}$$

□

なぜ、括弧積 $[a, b]$ を考えるのか？　そこには以下のように Leibniz' rule が絡んでいる。いま、V にさらに実双線型写像

$$\mu : V \times V \to V$$

が与えられたとする。

$$\mathrm{Der}(V, \mu) := \{a \in \mathrm{End}(V);\ \forall v_1, \forall v_2 \in V,\ a\mu(v_1, v_2) = \mu(av_1, v_2) + \mu(v_1, av_2)\}$$

と定義する。この定義式は $a \in \mathrm{Der}(V, \mu)$ が μ に関して Leibniz' rule を充たすと言っている。このような a を μ に関する **導分**（derivation）とよび、$\mathrm{Der}(V, \mu)$ を μ に関する**導分 Lie 代数**（derivation Lie algebra）とよぶ。

さて、$a, b \in \mathrm{Der}(V, \mu)$ について合成 ab を考えてみる。

$$
\begin{aligned}
ab\mu(v_1, v_2) &= a\mu(bv_1, v_2) + a\mu(v_1, bv_2) \\
&= \mu(abv_1, v_2) + \underline{\mu(bv_1, av_2) + \mu(av_1, bv_2)} + \mu(v_1, abv_2) \\
&\neq \mu(abv_1, v_2) + \mu(v_1, abv_2)
\end{aligned}
$$

この計算での下線部分があるため、一般には $ab \notin \mathrm{Der}(V, \mu)$ である。

しかし、$[a, b] = ab - ba$ を考えると、下線部分が打ち消しあって

$$[a, b]\mu(v_1, v_2) = \mu([a, b]v_1, v_2) + \mu(v_1, [a, b]v_2)$$

ゆえに $[a, b] \in \mathrm{Der}(V, \mu)$ である。つまり、$\mathrm{Der}(V, \mu)$ は合成では閉じていないが、括弧積では閉じている。

定義 6.12. (1) $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$: 実 Lie 代数

$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 0) $\mathfrak{g}$: 実ベクトル空間.

$[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$: 実双線型写像.

1)(skew) $\forall X, \forall Y \in \mathfrak{g}$

$$[X, Y] = -[Y, X].$$

2)(Jacobi) $\forall X, \forall Y, \forall Z \in \mathfrak{g}$

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$$

(2) 実 Lie 代数 $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ について $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$: **Lie 部分代数**（Lie subalgebra）

$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 0) $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$: 実線型部分空間.

1) $\forall X, \forall Y \in \mathfrak{k}$, $[X, Y] \in \mathfrak{k}$.

（このとき $(\mathfrak{k}, [\ ,\ ])$ は実 Lie 代数である。）

(3) 実 Lie 代数 $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$, $(\mathfrak{h}, [\ ,\ ])$ について

$\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$: 実 Lie (代数) 準同型

$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 0) $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$: 実線型写像

1) $\forall X, \forall Y \in \mathfrak{g}$, $\varphi([X, Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)] \in \mathfrak{h}$.

（例）$\mathrm{End}(V)$ は Lie 代数としては $\mathfrak{gl}(V)$ と書く。

$\mathrm{Der}(V, \mu)$ は $\mathfrak{gl}(V)$ の Lie 部分代数である。

[多様体と導分 Lie 代数]

それでは多様体に戻ることにする。

M: m-dim C^∞ mfd.

$C^\infty(M) = C^\infty(M; \mathbb{R}) = \{f : M \to \mathbb{R};\ C^\infty \text{ functions}\}$: 実ベクトル空間

$\mu : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, $(f, g) \mapsto (fg : p \in M \mapsto f(p)g(p) \in \mathbb{R})$, 掛け算.

とする。このとき、

$$\mathrm{Der}(C^\infty(M)) := \mathrm{Der}(C^\infty(M), \mu),\ \text{これは何か？} \qquad \text{答え: } \mathrm{Vect}(M).$$

実際、$f, g \in C^\infty(M)$, $X \in \mathrm{Vect}(M)$ について、$(Xf : p \in M \mapsto X_p f \in \mathbb{R}) \in C^\infty(M)$ としているが、補題 6.6 により $X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$ であるから、実線型写像

$$\theta : \mathrm{Vect}(M) \to \mathrm{Der}(C^\infty(M)), \quad X \mapsto (\theta(X) : f \mapsto Xf)$$

が定義できる。(θ はここだけの暫定的な記号。)

定理 6.13. このとき
(1) θ は実線型同型写像である。
(2) $(\mathrm{Vect}(M), [\ ,\ ])$ は Lie 代数であり、実線型同型写像 θ は Lie 準同型である。

証明. <u>(1) 単射 $\Rightarrow$ (2)</u>。補題 6.7 の括弧積の定義から $\forall X, \forall Y \in \mathrm{Vect}(M)$, $\forall f \in C^\infty(M)$ について $\theta([X,Y])(f) = [X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf) = \theta(X)(\theta(Y)f) - \theta(Y)(\theta(X)f) = [\theta(X), \theta(Y)](f)$ ゆえに

$$(*) \qquad \theta([X,Y]) = [\theta(X), \theta(Y)] \in \mathrm{Der}(C^\infty(M)).$$

補題 6.11(2) から右辺は Jacobi 律をみたすから

$$\begin{aligned}&\theta([[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y])\\ \overset{(*)}{=}&[[\theta(X),\theta(Y)],\theta(Z)] + [[\theta(Y),\theta(Z)],\theta(X)] + [[\theta(Z),\theta(X)],\theta(Y)] = 0\end{aligned}$$

である。そこで (1) 単射が示されれば、$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$ つまり Jacobi 律が示される。skew は明らかだから $\mathrm{Vect}(M)$ は Lie 代数である。式 $(*)$ は θ が Lie 準同型ということを言っている。ここまでで (1) 単射を仮定して (2) が示された。

(1) を証明する。その準備である次の補題はここだけでなくいろいろなところで必要になる。ここで Hausdorff 性を用いる。

補題 6.14. M: m-dim C^∞ mfd, $O \overset{\text{open}}{\subset} M$, $f : O \to \mathbb{R}$: C^∞ 函数, $p_0 \in O$.
$\Longrightarrow p_0 \in \exists O_1 \overset{\text{open}}{\subset} O$, $\overline{O_1} \subset O$, $\overline{O_1}$: compact, $\exists \tilde{f} : M \to \mathbb{R}$: C^∞ function,

$$\text{s.t., } \tilde{f}(p) = \begin{cases} f(p), & \text{if } p \in O_1, \\ 0, & \text{if } p \in M \setminus O. \end{cases}$$

証明. **ここだけの記号.** $a \in \mathbb{R}^m$, $r > 0$, $\|\cdot\|$: Euclidean norm, について次のように表す。

$$\begin{aligned}\overline{B}_m(a,r) &:= \{x \in \mathbb{R}^m;\ \|x - a\| \le r\},\\ B_m(a,r) &:= \{x \in \mathbb{R}^m;\ \|x - a\| < r\}.\end{aligned}$$

さて、$p_0 \in U$ をみたす M の chart (U, φ, V) をとり、$a_0 := \varphi(p_0) \in \varphi(U \cap O)$ とする。$\varphi(U \cap O) \overset{\text{open}}{\subset} V \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m$ だから $\exists r > 0$, $\overline{B}_m(a_0, r) \subset \varphi(U \cap O)$ である。この $r > 0$ について $\exists \chi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$: C^∞ 函数, s.t.,

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \in \overline{B}_m(a_0, r/3), \\ 0, & \text{if } p \notin B_m(a_0, 2r/3) \end{cases}$$

である。このとき

$$\tilde{f}(p) := \begin{cases} f(p)\chi(\varphi(p)), & \text{if } p \in U \cap O, \\ 0, & \text{if } p \in M \setminus \varphi^{-1}(\overline{B}_m(a_0, 2r/3)) \end{cases}$$

と定義する。ここで $\varphi^{-1}(\overline{B}_m(a_0, 2r/3))$ は compact だから Hausdorff 空間 M において閉である。そこで、$r > 0$ のとり方とあわせて $\{U \cap O, M \setminus \varphi^{-1}(\overline{B}_m(a_0, 2r/3))\}$ は M の開被覆である。重複する部分 $(U \cap O) \setminus \varphi^{-1}(\overline{B}_m(a_0, 2r/3))$ において $\tilde{f}$ の値は、いずれの定義でも 0 をとるから、$\tilde{f}$ は M 全体で定義された C^∞ 函数となる。$O_1 = \varphi^{-1}(B_m(a_0, r/3))$ とおくと $\tilde{f}$ は補題の条件をみたしている。 $\square$

単射性の証明に入る。$X \in \mathrm{Vect}(M)$, $\theta(X) = 0$ とする。

$$\forall p \in M,\ X_p = 0 \in T_pM$$

を示せばよい。$p \in U$ をみたす M の chart (U, φ, V), $\varphi = (x_1, \dots, x_m)$, をとる。$C^\infty$ 函数 x_i と $p \in U$ に補題 6.14 を適用して

$$\exists \tilde{x}_i : M \to \mathbb{R} : C^\infty \text{ 函数}, \text{s.t.}, \tilde{x}_i = x_i \,\text{near}\, p$$

である。このとき $\theta(X) = 0$ の仮定と $\tilde{x}_i = x_i$ near p により

$$0 = \theta(X)(\tilde{x}_i)(p) = X_p\tilde{x}_i = X_px_i$$

である。したがって $X_p = \sum_{i=1}^m (X_px_i)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = 0 \in T_pM$ となる。単射性が示された。

次に全射性を証明する。ここでも補題 6.14 を用いる。任意の $\alpha \in \mathrm{Der}(C^\infty(M))$ をとる。

主張 (i). $f \in C^\infty(M)$ とする。開集合 $O \overset{\text{open}}{\subset} M$ への制限 $f|_O$ が $f|_O = 0 \in C^\infty(O)$ を充たすとすると、$\alpha(f)|_O = 0$ がなりたつ。

主張 (i) の証明. 任意の $p_0 \in O$ について $\alpha(f)(p_0) = 0$ がなりたつことを示す。O 上の定数函数 $1 : O \to \mathbb{R}, p \mapsto 1,$ と $p_0 \in O$ に補題 6.14 を適用する。そこで C^∞ 函数 $\chi := \widetilde{1} : M \to \mathbb{R}$ と p_0 の O における開近傍 O_1 が存在して、χ は O_1 上で定数 1 をとり $M \setminus O$ 上で定数 0 をとる。後者の条件により $\chi f = 0 \in C^\infty(M)$ であるから $0 = \alpha(\chi f)(p_0)$ である。そこで $f(p_0) = 0$, $\chi(p_0) = 1$ を使うと $0 = \alpha(\chi f)(p_0) = \alpha(\chi)(p_0)f(p_0) + \chi(p_0)\alpha(f)(p_0) = \alpha(f)(p_0)$ となる。これが示すべきことであった。 □

各点 $p_0 \in M$ について線型写像

$$\alpha_{p_0} : (p_0 \text{ のまわりで定義された } C^\infty \text{ 函数}) \to \mathbb{R}$$

を構成する[1]。$f : O \to \mathbb{R}$ を p_0 の開近傍 O で定義された C^∞ 函数とする。これに補題 6.14 を適用して得られる $\tilde{f} \in C^\infty(M)$ をとって

$$\alpha_{p_0}(f) = \alpha(\tilde{f})(p_0) \in \mathbb{R}$$

と定める。well-defined であることを確かめる。別の $\tilde{\tilde{f}} \in C^\infty(M)$ をとると、p_0 の開近傍 O' が存在して $\tilde{\tilde{f}} - \tilde{f}$ は O' 上で 0 である。主張 (i) により $\alpha(\tilde{\tilde{f}} - \tilde{f})$ は O' 上で 0 である。とくに $\alpha(\tilde{\tilde{f}})(p_0) = \alpha(\tilde{f})(p_0)$ である。well-defined であることが示された。

いま f と g が p_0 のまわりで定義された C^∞ 函数であるとき、上述の $\tilde{f}, \tilde{g} \in C^\infty(M)$ をとると $\alpha_{p_0}(fg) = \alpha(\tilde{f}\tilde{g})(p_0) = \alpha(\tilde{f})(p_0)\tilde{g}(p_0) + \tilde{f}(p_0)\alpha(\tilde{g})(p_0) = \alpha_{p_0}(f)g(p_0) + f(p_0)\alpha_{p_0}(g)$ となる。同様に $\alpha_{p_0}(f+g) = \alpha_{p_0}(f) + \alpha_{p_0}(g)$ および任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ について $\alpha_{p_0}(\lambda f) = \lambda\alpha_{p_0}(f)$ がなりたつ。したがって、補題 4.5 を適用することができて、ただ一つ $v_{p_0} \in T_{p_0}M$ が存在して、p_0 のまわりで定義された任意の C^∞ 函数 f について $\alpha_{p_0}(f) = v_{p_0}(f)$ がなりたつ。v_{p_0} の一意性から vector 場

$$X : p_0 \in M \mapsto X_{p_0} := v_{p_0} \in T_{p_0}M$$

が定まる。

主張 (ii). vector 場 X は C^∞ vector 場である。

[1] α_{p_0} の定義域は、正確には、p_0 のまわりで定義された C^∞ 函数の全体において、p_0 の充分小さい開近傍に制限して一致するものは同一視して得られるベクトル空間である。

主張 (ii) の証明. 任意の $p_0 \in M$ の近傍で C^∞ であることを示せばよい。$p_0 \in U$ をみたす M の chart (U, φ, V) をとる。$\varphi = (x_1, \ldots, x_m)$ と成分表示する。このとき任意の $p \in U$ について $v_p = \sum_{i=1}^m (v_p x_i) \left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ だから、任意の $1 \leq i \leq m$ について $v_p x_i$ が p_0 の近傍で C^∞ であることを示せばよい。そこで、C^∞ 函数 $x_i : U \to \mathbb{R}$, $p_0 \in U$ に補題 6.14 を適用して、C^∞ 函数 $\widetilde{x_i} : M \to \mathbb{R}$ と U における p_0 の開近傍 O_1 が存在して、$\widetilde{x_i}$ は O_1 上では x_i に一致する。このとき、任意の $p \in O_1$ について $v_p(x_i) = v_p(\widetilde{x_i}) = \alpha(\widetilde{x_i})(p)$ であるが、$\alpha(\widetilde{x_i})$ は C^∞ である。したがって $v_p(x_i)$ は O_1 の上で C^∞ である。これが示すべきことであった。 □

最後に任意の $f \in C^\infty(M)$ と任意の $p \in M$ について

$$\theta(X)(f)(p) = X_p f = v_p f = \alpha(f)(p)$$

である。つまり $\theta(X) = \alpha \in \operatorname{Der} C^\infty(M)$ である。以上で全射性も証明され、定理がすべて証明された。 □

[微分同相の **vector** 場への作用]

補題 6.15. M, N: C^∞ 多様体, $\varphi : M \to N$: C^∞ 微分同相写像とする。

(1) $X \in \mathrm{Vect}(M)$ について、写像 $\varphi_* X : q \in N \mapsto (\varphi_* X)_q \in T_q N$ を

$$(\varphi_* X)_q = (d\varphi)_{\varphi^{-1}(q)} X_{\varphi^{-1}(q)} \in T_q N$$

によって定めると $\varphi_* X$ は N 上の C^∞ vector 場である。さらに $\forall f \in C^\infty(N)$ について次がなりたつ

$$(\varphi_* X) f = (X(f \circ \varphi)) \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(N).$$

(2) 写像

$$\varphi_* : \mathrm{Vect}(M) \to \mathrm{Vect}(N), \quad X \mapsto \varphi_* X,$$

は実 Lie （準）同型である。つまり $\forall X, \forall Y \in \mathrm{Vect}(M)$ について次がなりたつ

$$\varphi_*[X, Y] = [\varphi_* X, \varphi_* Y].$$

証明. (1) 写像の合成 $\varphi_* X : N \xrightarrow{\varphi^{-1}} M \xrightarrow{X} TM \xrightarrow{d\varphi} TN$ においてすべて C^∞ である。任意の $q \in N$ において次がなりたつ

$$\begin{aligned}((\varphi_* X) f)(q) &= (\varphi_* X)_q f = ((d\varphi)_{\varphi^{-1}(q)} X_{\varphi^{-1}(q)}) f = X_{\varphi^{-1}(q)}(f \circ \varphi) \\ &= (X(f \circ \varphi))(\varphi^{-1}(q)) = ((X(f \circ \varphi)) \circ \varphi^{-1})(q).\end{aligned}$$

(2) 任意の $f \in C^\infty(N)$ について次がなりたつ

$$\begin{aligned}([\varphi_* X, \varphi_* Y] f) \circ \varphi &= (\varphi_* X)((\varphi_* Y) f) \circ \varphi - (\varphi_* Y)((\varphi_* X) f) \circ \varphi \\ &= X(((\varphi_* Y) f) \circ \varphi) - Y(((\varphi_* X) f) \circ \varphi) = XY(f \circ \varphi) - YX(f \circ \varphi) \\ &= [X, Y](f \circ \varphi) = ((\varphi_*[X, Y]) f) \circ \varphi.\end{aligned}$$

□

§7. vector 場の積分曲線（前半）

[vector 場の積分曲線]

$m \geq 1$, M: m-dim C^∞ mfd, $X \in \mathrm{Vect}(M)$: C^∞ vector 場 とする。
開区間 $]a,b[\subset \mathbb{R}$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, を考える。

定義 7.1. $c:]a,b[\to M$: X の**積分曲線**（integral curve）
$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 0) $c:]a,b[\to M$: C^∞ 写像
1) $\forall t \in]a,b[$, $\dot{c}(t) = X_{c(t)} \in T_{c(t)}M$.

（つまり $c(t)$ のまわりの C^∞ 函数 f について $\dfrac{d}{dt}f(c(t)) = X_{c(t)}f$ である[2]。）

（注意）(1) 定数 $t_0 \in \mathbb{R}$ だけずらした $c(t+t_0)$ も X の積分曲線である。
(2) $\frac{d}{dt}c(-t) = -X_{c(-t)}$ であるから $c(-t)$ は $-X$ の積分曲線である。

補題 7.2. (1) 積分曲線は局所的に存在し、初期値について C^∞ である。つまり、

$$\forall p \in M,\ p \in \exists O \overset{\text{open}}{\subset} M,\ \exists \varepsilon > 0, \quad (O, \varepsilon \text{ は } X, p \text{ に依存する})$$

$$\exists c:]-\varepsilon, \varepsilon[\times O \to M,\ (t,q) \mapsto c_q(t),\ C^\infty \text{ 写像, s.t.} \begin{cases} c_q(0) = q, \\ \forall t \in]-\varepsilon,\varepsilon[, \quad \dot{c}_q(t) = X_{c_q(t)}, \end{cases}$$

となる。最後の 2 式は c_q は $t=0$ で q を通る X の積分曲線であることを言っている。

(2) 積分曲線は存在すれば一意的である。つまり、$a < t_0 < b$, $a' < t_0' < b'$ について X の積分曲線 $c:]a,b[\to M$ と $c':]a',b'[\to M$ が $c(t_0) = c'(t_0')$ をみたすならば、$]a'',b''[=]a,b[\cap]a'-t_0'+t_0, b'-t_0'+t_0[$ とおくとき次がなりたつ

$$a'' < \forall t < b'', \quad c(t) = c'(t - t_0 + t_0').$$

証明. (U, φ, V), $\varphi = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, を M の chart で $p \in U$ をみたすものとする。この chart に関して $X = \sum_{i=1}^m \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ と表す。$\xi_i: U \to \mathbb{R}$ は C^∞ 函数である。

いま「未知曲線」$c(t)$ について、未知函数 $f(t)$ を $\varphi(c(t)) =: f(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t))$ によって定めると

$$\dot{c}(t) = \sum_{i=1}^m \frac{df_i}{dt}\frac{\partial}{\partial x_i},$$
$$X_{c(t)} = \sum_{i=1}^m (\xi_i \circ \varphi^{-1})(f(t))\frac{\partial}{\partial x_i}$$

となるから、

$$\dot{c}(t) = X_{c(t)} \iff 1 \leq \forall i \leq m,\ \frac{df_i}{dt} = (\xi_i \circ \varphi^{-1})(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t))$$

と書き換えられる。初期条件 $c(0) = q$ とあわせると、これは常微分方程式の初期値問題に他ならず、常微分方程式の初期値問題の基本定理に帰着する。つまり

(1) は解の存在と初期値への C^∞ 依存性に他ならない。

[2] ここで $\dot{c}(t) = \dfrac{d}{dt}f(c(t)) \in T_{c(t)}M$ は $s \in \mathbb{R}$, $|s| \ll 1$, の曲線 $c(t+s)$ の定める接ベクトルを表す。

(2) は解の一意性による。パラメータをずらし、定義域の共通部分をとって $]a',b'[=]a,b[$, $t'_0 = t_0$ としてよい。集合 $A := \{t \in]a,b[;\ c(t) = c'(t) \in M\}$ を考える。$t_0 \in A$ より $A \neq \emptyset$ である。M は Hausdorff 空間だから A は $]a,b[$ の閉集合である。解の一意性により、任意の $t_1 \in A$ の充分小さい近傍は A に含まれる。つまり A は開集合である。したがって、$]a,b[$ の連結性から $A =]a,b[$ となり、$c = c'$ が $]a,b[$ 全体でなりたつ。(2) が示された。 □

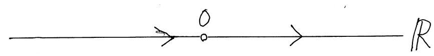
[vector 場の完備性]

定義 7.3. X: 完備（complete）
$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall p \in M$, $\exists c : \mathbb{R} \to M$: X の積分曲線 s.t., $c(0) = p$.

例. (0) $X = 0$ つまり $\forall p \in M$, $X_p = 0 \in T_pM$ のとき $\forall t \in \mathbb{R}$, $c(t) = p$（定数写像）が積分曲線である。実際、$c(0) = p$, $\dot{c}(t) = 0 = X_{c(t)}$ だからである。とくに $X = 0$ は完備である。

(1) $M = \mathbb{R}$, $X = \dfrac{\partial}{\partial x}$ は完備である。実際、$\forall p \in \mathbb{R}$ について $c(t) = p + t$, $t \in \mathbb{R}$, は、$c(0) = p$, $\dot{c}(t) = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)_{c(t)}$ により X の積分曲線となるからである。

(2) $M = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $X = \dfrac{\partial}{\partial x}$ は完備ではない（下図参照）。



(3) $M = \mathbb{R}$, $X = (x^2+1)\dfrac{\partial}{\partial x}$ は完備ではない。なぜなら、$c(t) = \tan t$ は $c(0) = 0$ をみたす積分曲線である（$(\because)$ $\dot{c}(t) = (1+\tan^2 t)\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)_{c(t)} = (1+c(t)^2)\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)_{c(t)} = X_{c(t)}$）が、$t \to \frac{\pi}{2}$ で $c(t) \to +\infty$ つまり発散するからである。

[積分曲線の延長]

ここからは可能なだけ延長した積分曲線を構成する。そのために記号を導入する。

ここだけの記号 3 つ. $X \in \mathrm{Vect}(M)$, $p \in M$ とする。

$$\mathcal{I}(p,X) := \{I \subset \mathbb{R};\ 0 \in I : \text{開区間},\ \exists c^I : I \to M; X \text{ の積分曲線, s.t.}, c^I(0) = p\},$$
$$I^p = I^{p,X} := \bigcup_{I \in \mathcal{I}(p,X)} I \subset \mathbb{R},$$
$$\mathcal{U}^X := \{(t,p) \in \mathbb{R} \times M;\ t \in I^{p,X}\},$$

とおく。補題 7.2(1) により $\mathcal{I}(p,X) \neq \emptyset$ である。また、すべての開区間 $I \in \mathcal{I}(p,X)$ には 0 が属するから、$I^{p,X} \subset \mathbb{R}$ は開区間である[3]。

さらに、補題 7.2(2) により $I_1, I_2 \in \mathcal{I}(p,X)$ について

$$c^{I_1}|_{I_1 \cap I_2} = c^{I_2}|_{I_1 \cap I_2}$$

であるから、$I^{p,X}$ 全体で定義された X での積分曲線

$$c^p : I^{p,X} \to M$$

[3] $\mathbb{R}$ の連結開集合は開区間に限る。

で $c^p(0)=p$ をみたすものがただ一つ存在する。そこで、写像

$$\Phi^X : \mathcal{U}^X \to M, \quad (t,p) \mapsto \Phi^X(t,p) := c^p(t)$$

が定義できる。(通常は $\Phi^X(t,p)=\mathrm{Exp}(tX)(p)$ と書くが、現状では tX の意味がはっきりしないので、この書き方にする。)とくに

$$X\text{: 完備} \iff \forall p \in M,\, I^{p,X}=\mathbb{R} \iff \mathcal{U}^X = \mathbb{R}\times M$$

である。

定理 7.4. (1) $\mathcal{U}^X \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}\times M$.
(2) $\Phi^X : \mathcal{U}^X \to M$: C^∞ 写像.

証明には Lebesgue 数を用いる。

[Lebesgue 数]

一般に、空でない compact 距離空間 (Z,d) と $\emptyset \neq A \subset Z$ について

$$\delta(A) := \sup\{d(a,a');\ a,a' \in A\} = \sup d(A\times A), \quad A \text{ の } \textbf{直径}\text{(diameter)}$$

と定める。$Z\times Z$ は compact で距離 $d : Z\times Z \to \mathbb{R}$ は連続だから $\delta(A)=\sup d(A\times A) \le \sup d(Z\times Z) \lneqq +\infty$ である。また $\delta(\emptyset):=0$ と定める。

補題 7.5 (Lebesgue 数). $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をコンパクト距離空間 Z の開被覆とする。このとき($\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に依存する)正の実数 $\rho>0$ が存在して、任意の部分集合 $A\subset Z$ について

$$\delta(A) \le \rho \Longrightarrow \exists \lambda \in \Lambda,\, A \subset U_\lambda$$

をみたす。この数 $\rho>0$ を開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の Lebesgue 数(Lebesgue number)という。

証明. 背理法によって証明する。結論の否定

$$\forall n \in \mathbb{N}_{>0}, \exists A_n \subset Z, \quad \text{s.t.} \quad \delta(A_n) \le 1/n \quad \text{かつ} \quad \forall \lambda \in \Lambda,\ A_n \not\subset U_\lambda$$

を仮定して矛盾を導く。各 $n\in\mathbb{N}_{>0}$ について $A_n \neq \emptyset$ であるから、点 $a_n \in A_n$ を一つづつとる。いま Z はコンパクトであるから、列 $\{a_n\}$ は収束部分列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}_{>0}}$ をもつ。$a := \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \in Z$ とおく。$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は Z の開被覆だから、ある $\lambda\in\Lambda$ について $a\in U_\lambda$ となる。U_λ は Z の開集合だから、充分小さい $\epsilon>0$ について a を中心とし半径が ϵ の開球は U_λ に含まれる。つまり、

$$\exists\lambda\in\Lambda, \exists \epsilon>0, \forall y \in Z, \quad d(y,a)<\epsilon \implies y \in U_\lambda$$

となる。充分大きい k を $d(a_{n_k},a)<\epsilon/2$ かつ $1/n_k<\epsilon/2$ となるようにとる。このとき $\forall y \in A_{n_k}$ について

$$d(y,a) \le d(y,a_{n_k}) + d(a_{n_k},a) < \delta(A_{n_k}) + \epsilon/2 \le 1/n_k + \epsilon/2 < \epsilon/2+\epsilon/2 = \epsilon$$

したがって $y\in U_\lambda$ つまり $A_{n_k}\subset U_\lambda$ となる。これは A_n のとりかたに矛盾する。補題が証明された。 □

[定理 7.4 の証明]

以上の準備のもとで定理 7.4 を証明する。

定理 7.4 の証明. $(t_0, p_0) \in \mathcal{U}^X$ とする。まず $t_0 \geq 0$ の場合を考える。

Claim 1. $p_0 \in \exists O_{p_0} \overset{\text{open}}{\subset} M$, $\exists \delta > 0$, $\exists \Phi :]-\delta, t_0 + \delta[\times O_{p_0} \to M$: C^∞ map,

$$\text{s.t.}, \forall (t,p) \in]-\delta, t_0+\delta[\times O_{p_0},\ \frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,p) = X_{\Phi(t,p)},\quad \Phi(0,p) = p.$$

Claim 1 の証明. $t_0 \in I^{p_0} \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}$ だから $t_1 \gneqq t_0$ を $(p_0, t_1) \in \mathcal{U}^X$ となるようにとる。各 $s \in [0, t_1]$ について $c^{p_0}(s)$ に補題 7.2(1) を適用して、

$$\exists \varepsilon_s > 0,\ c^{p_0}(s) \in \exists O_s \overset{\text{open}}{\subset} M,\ \exists c^s :]-\varepsilon_s, \varepsilon_s[\times O_s \to M,\ (t,q) \mapsto c^s(t,q) (=: c^s_q(t)),\ C^\infty \text{ 写像},$$

$$\text{s.t.}, \forall (t,q) \in]-\varepsilon_s, \varepsilon_s[\times O_s,\ c^s_q(0) = q,\ \dot{c}^s_q(t) = X_{c^s_q(t)}$$

となる。$c^0 := c^s|_{s=0}$, $\varepsilon_0 := \varepsilon_s|_{s=0}$, $\varepsilon_0 := \varepsilon_s|_{s=0}$, $O_0 := O_s|_{s=0} \ni c^{p_0}(0) = p_0$ とおく。

compact 距離空間 $[0, t_1]$ の開被覆 $\{]s - \frac{1}{2}\varepsilon_s, s + \frac{1}{2}\varepsilon_s[\}_{s\in[0,t_1]}$ の Lebesgue 数 $\rho > 0$ をとり $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ を $\frac{t_1}{N} \leq \rho$, $\frac{t_1}{N} \lneqq \varepsilon_0$ となるようにとると $[0, \frac{t_1}{N}] \subset]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$ かつ

$$1 \leq \forall k \leq N-1,\ \exists s_k \in [0, t_1],\quad [\frac{kt_1}{N}, \frac{(k+1)t_1}{N}] \subset]s_k - \frac{1}{2}\varepsilon_{s_k}, s_k + \frac{1}{2}\varepsilon_{s_k}[$$

である。$F_0 : O_0 \to M$, $p \to c^0(\frac{t_1}{N}, p)$, とおき、$1 \leq k \leq N-1$ について

$$O_k := O_{s_k},\ \varepsilon_k := \varepsilon_{s_k},\ c^k := c^{s_k}$$

とおく。また、$O_N := O_{t_1}$ とおく。$1 \leq k \leq N-1$ について $\frac{t_1}{N} < \varepsilon_k$ だから、C^∞ 写像

$$F_k : O_k \to M, \quad p \mapsto c^k(\frac{t_1}{N}, p)$$

が定義できる。$1 \leq \forall k \leq N$ について $F_{k-1} \circ \cdots \circ F_0(p_0) = c^{p_0}(\frac{kt_0}{N}) \in O_k$ である。そこで

$$O_{p_0} := O_0 \cap \bigcap_{k=1}^{N} (F_{k-1} \circ \cdots \circ F_0)^{-1}(O_k) \overset{\text{open}}{\subset} M$$

とおく。$p_0 \in O_{p_0}$ である。写像 $\Phi :]-\varepsilon_0, t_1] \times O_{p_0} \to M$ を

$$\Phi(t,p) := \begin{cases} c^0(t,p), & \text{if } t \leq \frac{t_1}{N}, \\ c^k(t - \frac{kt_1}{N}, F_{k-1} \circ \cdots \circ F_0(p)), & \text{if } t \in [\frac{kt_1}{N}, \frac{(k+1)t_1}{N}],\ 1 \leq k \leq N-1, \end{cases}$$

と定めると、これは連続である。p をとめると $\Phi(\cdot, p)$ は X の積分曲線である。補題 7.2(2) をつかって補題 7.2(1) の C^∞ な局所解と比較すると Φ は $]-\varepsilon_0, t_1[\times O_{p_0}$ 上で C^∞ である。かくして Φ は望む条件をみたす。$\delta = \min\{\varepsilon_0, t_1 - t_0\}$ とおけばよい。 □

つぎに $t_0 \leq 0$ の場合は $-X$ に Claim 1 を適用して次がなりたつ。

Claim 2. $p_0 \in \exists O_{p_0}^- \overset{\text{open}}{\subset} M$, $\exists \delta > 0$, $\exists \Phi :]t_0 - \delta, \delta[\times O_{p_0}^- \to M$: C^∞ map,

$$\text{s.t.}, \forall (t,p) \in]t_0-\delta,\delta[\times O_{p_0}^-, \ \frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,p) = X_{\Phi(t,p)}, \quad \Phi(0,p) = p.$$

定理の証明にもどる。

(1) Claim 1 と Claim 2 により $(t_0, p_0) \in]-\delta, t_0+\delta[\times O_{p_0} \subset \mathcal{U}^X$ または $(t_0, p_0) \in]t_0-\delta,\delta[\times O_{p_0}^- \subset \mathcal{U}^X$ である。つまり $\mathcal{U}^X$ は任意の $(t_0,p_0) \in \mathcal{U}^X$ の近傍である。(1) が示された。

(2) は Claim 1 および Claim 2 の Φ が Φ^X に一致することからわかる。 □

次回は Frobenius の定理を証明する。

[例題演習]

例題演習 第9回

$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z);\ x,y,z \in \mathbb{R}\}$ 上の C^∞ vector 場

$$Z := -xz\frac{\partial}{\partial x} - yz\frac{\partial}{\partial y} + (x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial z}$$

を 2 次元単位球面 $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2=1\}$ の上で考える。

(1) 任意の $p \in S^2$ について $Z_p \in T_pS^2$ であることを示せ。そこで以下 Z を S^2 上の C^∞ vector 場とみなす。

(2) $U := \{(x,y,z) \in S^2;\ x > 0\} \overset{\text{open}}{\subset} S^2$ とする。局所座標 $(\eta,\zeta) : U \to \mathbb{R}^2$, $(x,y,z) \mapsto (\eta,\zeta) := (y,z)$, を用いて Z を表示せよ。

(3) 点 $(1,0,0) \in S^2$ を通る Z の積分曲線を求めよ。