

幾何学 I

第 6 回

河澄響矢

今回の内容: 接 vector の別の見方, 写像の微分 $(dF)_p$, 直積の接空間, 部分多様体の接空間, 正則点, 臨界点, 正則値, 臨界値, Sard の定理, C^∞ 関数の極値判定, Hesse 行列とその符号.

§4. 接空間 (後半)

[前回の復習]

しばらく前回の復習を行う。

M : m -dim. C^∞ mfd, $m \geq 1$, ($\dim M = 0$ のとき $T_p M = \{0\}$ とする。)

(U, φ, V) : chart of M , $\varphi = (x_1, x_2, \dots, x_m) : U \xrightarrow{\cong} V \subset \mathbb{R}^m$,

$p \in U$, $\varphi(p) = a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in V \subset \mathbb{R}^m$ とする。

この講義だけの記号. $\hat{T}_p M := \{c; \varepsilon > 0, c :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M : C^\infty \text{ 写像}, c(0) = p\}$.

ここで $]-\varepsilon, \varepsilon[\subset \mathbb{R}$ は開区間を表す。 $c, c' \in \hat{T}_p M$ について

$$\begin{aligned} c &\sim c' \\ \stackrel{\text{定義}}{\iff} & \forall f : p \text{ のまわりの } C^\infty \text{ 関数}, \quad \left. \frac{d}{dt} f(c(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} f(c'(t)) \right|_{t=0} \\ \stackrel{\text{補題 4.1}}{\iff} & 1 \leq \forall i \leq m, \quad \left. \frac{d}{dt} x_i(c(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} x_i(c'(t)) \right|_{t=0} \end{aligned}$$

を思い出す。

$$T_p M \stackrel{\text{定義}}{=} \hat{T}_p M / \sim, \quad p \text{ における } M \text{ の接空間}$$

であって、曲線 $c \in \hat{T}_p M$ の同値類を

$$\dot{c}(0) = \left. \frac{d}{dt} c(t) \right|_{t=0} := [c] = c \bmod \sim \in T_p M$$

とあらわし、曲線 c の定める接ベクトルとよぶ。 chart φ の定める写像

$$(d\varphi)_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \dot{c}(0) \mapsto \left(\left. \frac{d}{dt} x_i(c(t)) \right|_{t=0} \right)_{i=1}^m = \left. \frac{d}{dt} \varphi(c(t)) \right|_{t=0}$$

は全単射であり (補題 4.1, 補題 4.2)、これが実線型同型となるように $T_p M$ に実 vector 空間の構造をいれると φ のとり方によらない (補題 4.3)。 $1 \leq i \leq m$ について

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p &:= (d\varphi)_p^{-1}(t(0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0)) \in T_p M \\ &= \left. \frac{d}{dt} \varphi^{-1}(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_m) \right|_{t=0} \end{aligned}$$

とおく。 $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \right\}_{i=1}^m$ は $T_p M$ の基底となる。 $(d\varphi)_p$ によって \mathbb{R}^m の基本単位ベクトルたちに写るからである。

$U_0 \subset U$ 上で定義された C^1 関数 $f : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ について

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} := \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} \circ \varphi : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$$

と定める。これは連続関数である。

$$T_p^*M := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(T_pM, \mathbb{R}), \quad \text{余接空間 (cotangent space)}$$

と定める。 $p \in U_0$ について $(df)_p \in T_p^*M$ を $(df)_p(\dot{c}(0)) := \frac{d}{dt}f(c(t))\Big|_{t=0}$ によって定めると、 $(df)_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ となる。とくに $f = x_i$ ととって

$$\{(dx_i)_p\}_{i=1}^m \subset T_p^*M, \quad \left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right\}_{i=1}^m \text{ の双対基.}$$

復習は以上である。

[接 vector と関数の掛け算の関係]

関数の掛け算との関係を通して、接 vector を別の方向から見直す。
まず、 $v \in T_pM$, f, g : p のまわりで定義された C^1 関数について

$$v(f) := (df)_p(v) \in \mathbb{R}$$

と表す。このとき、関数の掛け算 fg について次がなりたつ

$$v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g).$$

証明. $v = \dot{c}(0)$, $c \in \hat{T}_pM$ とする。

$$\begin{aligned} v(fg) &= \frac{d}{dt}f(c(t))g(c(t))\Big|_{t=0} \stackrel{\text{Leibniz' rule}}{=} \frac{d}{dt}f(c(t))\Big|_{t=0}g(c(0)) + f(c(0))\frac{d}{dt}g(c(t))\Big|_{t=0} \\ &= v(f)g(p) + f(p)v(g). \end{aligned}$$

□

逆に次がなりたつ。

補題 4.5. (U, φ, V) が M の chart であって、 $p \in U$ をみだし、 $V \subset \mathbb{R}^m$ が凸であるとする。また $\varphi = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ とする。 \mathbb{R} -線型写像 $\alpha: (U \text{ 上の } C^\infty \text{ 関数}) \rightarrow \mathbb{R}$ が¹、 U 上で定義された任意の C^∞ 関数 f, g について条件

$$\alpha(fg) = \alpha(f)g(p) + f(p)\alpha(g)$$

を満たすならば、 p における M の接 vector $v \in T_pM$ であって、 p のまわりで定義された任意の C^∞ 関数 f について

$$\alpha(f) = v(f)$$

を満たすものがただ一つ存在する。

¹ $(U \text{ 上の } C^\infty \text{ 関数})$ の代わりに M 上の C^∞ 関数の p での芽の全体とすることも可能である。

証明. (一意性) $\{(dx_i)_p\}_{i=1}^m$ と $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right\}_{i=1}^m$ は互いに双対基だから

$$(b) \quad v = \sum_{i=1}^m (dx_i)_p(v) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = \sum_{i=1}^m v(x_i) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = \sum_{i=1}^m \alpha(x_i) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

となる。右辺は α だけで決まるから v の一意性が示された。

(存在) 準備として、定数関数 1 について $\alpha(1) = 0$ であることに注意する。なぜなら $\alpha(1) = \alpha(1 \cdot 1) = \alpha(1) \cdot 1 + 1 \cdot \alpha(1) = 2\alpha(1)$ となるからである。そこで、 α の実線型性により、任意の定数関数 c について $\alpha(c) = \alpha(c \cdot 1) = c\alpha(1) = 0$ である。

さて、 α が与えられたとする。逆に式 (b) をつかって v を定義する。 $\varphi(p) = a = 0$ としてよい (必要なら平行移動を行う)。 U 上で定義された任意の C^∞ 関数 f は、 V 上で定義された C^∞ 関数 f_i , $1 \leq i \leq m$, によって

$$(bb) \quad f(\varphi^{-1}(x)) = f(p) + \sum_{i=1}^m x_i f_i(x)$$

と表される (あとで証明する。)。ここで $f_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ である。両辺に α を施すと、

$$\begin{aligned} \alpha(f) &= \alpha(f(p)) + \sum_{i=1}^m \alpha(x_i f_i(x)) = 0 + \sum_{i=1}^m (\alpha(x_i) f_i(0) + x_i(0) \alpha(f_i)) \\ &= \sum_{i=1}^m (\alpha(x_i) f_i(0) + 0) = \sum_{i=1}^m \alpha(x_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = v(f) \end{aligned}$$

となる。これが示すべきことである。

あとは (bb) を示せばよい。 V は凸だから、任意の $x \in V$ と任意の $t \in [0, 1]$ について $f \circ \varphi^{-1}(tx)$ が定義される。Chain rule を使って計算すると、任意の $x = (x_1, \dots, x_m) \in V_0$ について

$$f\varphi^{-1}(x) = f\varphi^{-1}(0) + \int_0^1 \frac{d}{dt}(f\varphi^{-1})(tx)dt = f(p) + \int_0^1 \sum_{i=1}^m \frac{\partial(f\varphi^{-1})}{\partial x_i}(tx) x_i dt$$

となるから、 $f_i(x) := \int_0^1 \frac{\partial(f\varphi^{-1})}{\partial x_i}(tx)dt$, $x \in V_0$, とおくと、これは V_0 上の C^∞ 関数であって $f\varphi^{-1}(x) = f(p) + \sum_{i=1}^m x_i f_i(x)$ となる。つまり (bb) がえられた。これが示すべきことであった。 \square

証明の中の式 (b) に含まれている次の式に注意する

$$(\sharp) \quad v = \sum_{i=1}^m v(x_i) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p.$$

[写像の微分]

いよいよ Jacobi 行列の一般化である写像の微分を考える。 $M, N: C^\infty$ 多様体, $\dim M = m$, $\dim N = n$ とし², $F: M \rightarrow N$ を C^∞ 写像、 $p \in M$ とする。この状況で Jacobi 行列に対応する「写像の微分」 $(dF)_p$ を構成するのであるが、

$$(dF)_p: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N, \quad \dot{c}(0) \mapsto (F \circ c)(0),$$

と定義したい。

補題 4.6. (1) $(dF)_p$ は well-defined である。

(2) 任意の $v \in T_p M$ と $F(p)$ のまわりで定義された任意の C^∞ 関数 f について次がなりたつ

$$((dF)_p(v))(f) = v(f \circ F).$$

(3) $(dF)_p: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ は実線型写像である。

(4) $F(p) \in O$ をみたく N の chart (O, ψ, W) , $\psi = (y_1, \dots, y_n)$ について

$$(dF)_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(y_j \circ F)}{\partial x_i}(p) \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_{F(p)}$$

がなりたつ³。

証明. (1) $c, c' \in \hat{T}_p M$, $c \sim c'$ とする。 $F(p)$ のまわりで定義された任意の C^∞ 関数 f について $f \circ F$ は p のまわりで定義された C^∞ 関数だから $\left. \frac{d}{dt} f F c(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} f F c'(t) \right|_{t=0}$ ゆえに $F \circ c \sim F \circ c'$ である。(1) が示された。

(2) $v = \dot{c}(0)$ とすると

$$v(f \circ F) = \left. \frac{d}{dt} f F c(t) \right|_{t=0} = ((F \circ c)(0))(f) = ((dF)_p(v))(f)$$

となる。(2) が示された。

(3)(4) $\forall \lambda = {}^t(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ について

$$v_\lambda := \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p = (d\varphi)_p^{-1}(\lambda) = \left. \frac{d}{dt} \varphi^{-1}(\varphi(p) + t\lambda) \right|_{t=0}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} (dF)_p \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \right) &= (dF)_p(v_\lambda) \stackrel{(\#)}{=} \sum_{j=1}^n ((dF)_p(v_\lambda))(y_j) \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_{F(p)} \\ &\stackrel{(2)}{=} \sum_{j=1}^n v_\lambda(y_j \circ F) \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_{F(p)} = \sum_{j=1}^n \left. \frac{d}{dt} (y_j \circ F \circ \varphi^{-1})(\varphi(p) + t\lambda) \right|_{t=0} \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_{F(p)} \\ &\stackrel{\text{Chain rule}}{=} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \frac{\partial(y_j \circ F \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)) \lambda_i \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_{F(p)} \\ &= \sum_{i=1}^m \lambda_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial(y_j \circ F \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)) \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_{F(p)} \end{aligned}$$

²このことを「 $M^m, N^n: C^\infty$ 多様体」とも書く。

³褒められた記号ではないが $\frac{\partial(y_j \circ F)}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(p)$ と略記することもあるので注意する。

は λ について線型である。(3) が示された。 $\lambda = {}^t(0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0)$ を代入して (4) が示される。以上で補題が示された。 \square

線型写像

$$(dF)_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$$

を写像 F の点 p における微分 (differential) とよぶ。補題 4.6(4) の状況で可換図式

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow{(dF)_p} & T_{F(p)} N \\ (d\varphi)_p \downarrow \cong & & \cong \downarrow (d\psi)_{F(p)} \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{J(\psi F \varphi^{-1})_{\varphi(p)}} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

がなりたつことに注意する。実際、(4) に現れた行列 $\left(\frac{\partial(y_j \circ F)}{\partial x_i}(p) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ は Jacobi 行列 $J(\psi F \varphi^{-1})_{\varphi(p)}$ に他ならないからである。

さて、次は定義から直ちにわかる。

補題 4.7.

$$(d1_M)_p = 1_{T_p M},$$

$$d(G \circ F)_p = (dG)_{F(p)}(dF)_p, \quad (\text{ここでは } C^\infty \text{ 写像の列 } M \xrightarrow{F} N \xrightarrow{G} L \text{ を考えている.})$$

証明. (1) $\dot{c}(0) \mapsto (1_M \circ c)(0) = \dot{c}(0)$.

$$(2) \dot{c}(0) \xrightarrow{d(G \circ F)_p} (G \circ F \circ c)(0) = (dG)_{F(p)}(F \circ c)(0) = (dG)_{F(p)}(dF)_p \dot{c}(0). \quad \square$$

系 4.8. $F : M \rightarrow N$, C^∞ diffeo

$\implies \forall p \in M, (dF)_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$, 実線型同型.

とくに $M \neq \emptyset$ ならば $\dim M = \dim N$ である。

注意 4.9. M, N, C^∞ 多様体, $F : M \rightarrow N, C^\infty$ 写像について

$$F : M \rightarrow N, \text{ locally } C^\infty \text{ diffeomorphic}$$

$$\overset{\text{逆写像定理}}{\iff} \forall p \in M, (dF)_p : T_p M \xrightarrow{\cong} T_{F(p)} N, \text{ 実線型同型.}$$

[直積]

補題 4.10 M, N, C^∞ 多様体, $m = \dim M, n = \dim N$.

$$\varpi_1 : M \times N \rightarrow M, (p, q) \mapsto p, \text{ the first projection,}$$

$$\varpi_2 : M \times N \rightarrow N, (p, q) \mapsto q, \text{ the second projection.}$$

$\implies \forall (p, q) \in M \times N, (d\varpi_1)_{(p,q)} \times (d\varpi_2)_{(p,q)} : T_{(p,q)}(M \times N) \rightarrow T_p M \times T_q N$, 実線型同型.

証明. (U, φ, V) : chart of M , $p \in U$, (O, ψ, W) : chart of N , $q \in O$, とする。 $\varphi \times \psi$ は (p, q) のまわりの $M \times N$ の局所座標である。補題は次の可換図式からわかる

$$\begin{array}{ccc} T_{(p,q)}(M \times N) & \xrightarrow{(d\varphi)_{(p,q)} \times (d\psi)_{(p,q)}} & T_p M \times T_q N \\ & \searrow \cong \quad \quad \quad \nearrow \cong & \\ & d(\varphi \times \psi)_{(p,q)} \quad \quad \quad (d\varphi)_p \times (d\psi)_q & \\ & \mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n. & \end{array}$$

□

(ただなんとなく同型がなりたっているというよりも、具体的な同型写像が与えられている方が情報はずっと多く、実際の計算にも使える。)

[有限次元実ベクトル空間]

有限次元実ベクトル空間には以下のように C^∞ 多様体の構造が入る。

補題 4.11. V, V_0, V_1 , 有限次元実ベクトル空間とする。

(1) $U \subset V$, $p \in U$ について写像

$$V \rightarrow T_p U, \quad v \mapsto \left. \frac{d}{dt}(p + tv) \right|_{t=0}$$

は実線型同型である。これによって同一視する。

(2) $p \in U_0 \subset V_0$, $U_1 \subset V_1$, $F: U_0 \rightarrow U_1$, C^∞ 写像について、(1) の同一視のもとで次の図式は可換である

$$\begin{array}{ccc} T_p U_0 & \xrightarrow{(dF)_p} & T_{F(p)} U_1 \\ \cong \uparrow & & \cong \uparrow \\ V_0 & \xrightarrow{(JF)_p} & V_1. \end{array}$$

ここで $(JF)_p: V_0 \rightarrow V_1$ は $v \in V_0$ を $(JF)_p v = \left. \frac{d}{dt} F(p + tv) \right|_{t=0}$ に写すことを思い出す。

証明. (1) $m = \dim V$ とすると $\exists \varphi: V \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^m$, 実線型同型, である。このとき、2つの同型

$$V \xrightarrow[\cong]{\varphi} \mathbb{R}^m \xleftarrow[\cong]{(d\varphi)_p} T_p U$$

において $v \in V$ は $\varphi(v) \in \mathbb{R}^m$ に、 $\left. \frac{d}{dt}(p + tv) \right|_{t=0} \in T_p U$ は $\left. \frac{d}{dt} \varphi(p + tv) \right|_{t=0} \in \mathbb{R}^m$ に写るが、 φ が線型であることから、これらは \mathbb{R}^m において一致する: $\varphi(v) = \left. \frac{d}{dt} \varphi(p + tv) \right|_{t=0} \in \mathbb{R}^m$. これは (1) を意味する。

(2) $(dF)_p$ の定義により $(JF)_p v = \left. \frac{d}{dt} F(p + tv) \right|_{t=0} = (dF)_p \left(\left. \frac{d}{dt}(p + tv) \right|_{t=0} \right)$ である。 □

[部分多様体]

つぎに、部分多様体と接空間を関係を考える。 $m \leq n$, N : n -dim C^∞ mfd とする。

$$\begin{aligned} & M \subset N, m\text{-dim } C^\infty \text{ submfd} \\ \iff & \forall p \in M, \exists (U_p, \varphi_p, V_p), \text{ chart of } N, \text{ s.t., } p \in U_p, M \cap U_p = \varphi_p^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\}) \end{aligned}$$

を思い出す。($m = n$ のとき $M \subset^{\text{open}} N$ であることと同値である。) $i : M \hookrightarrow N, p \in M \mapsto p \in N$, を包含写像 (inclusion map) とする。

補題 4.12. このとき、 $\forall p \in M$ について

$$(di)_p : T_p M \rightarrow T_p N, \quad \text{単射.}$$

これにより $T_p M \subset T_p N$ とみなす。(とくに $M \subset^{\text{open}} N$ ならば $T_p M = T_p N$ である。)

証明. $\iota : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} = \mathbb{R}^n, u \mapsto (u, 0)$, とあらわす。 $\widehat{V}_p := \iota^{-1}(V_p) \subset \mathbb{R}^m$ とし、 $\widehat{\varphi}_p : M \cap U_p \rightarrow \widehat{V}_p$ を $q \in M \cap U_p$ について $\varphi_p(q) = (\widehat{\varphi}_p(q), 0) = \iota(\widehat{\varphi}_p(q))$ をみたすように定義する。つまり可換図式

$$\begin{array}{ccc} M \cap U_p & \xrightarrow{\widehat{\varphi}_p} & \widehat{V}_p \\ \downarrow i & & \downarrow \iota \\ U_p & \xrightarrow[\varphi_p]{\cong} & V_p \end{array}$$

がなりたつ。そこで (##) で述べた可換図式

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow{(di)_p} & T_p N \\ (d\widehat{\varphi}_p)_p \downarrow \cong & & \cong \downarrow (d\varphi_p)_p \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow[(J\iota)_p = \iota]{} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

がなりたつが、補題 2.11 より $(M \cap U_p, \widehat{\varphi}_p, \widehat{V}_p)$ は M の chart だから $(d\widehat{\varphi}_p)_p$ は同型であり、 $(d\iota)_p = \iota$ は単射だから $(di)_p$ も単射である。 \square

[正則値、臨界値]

第2回と同様に C^∞ 多様体の間の C^∞ 写像についても正則値、臨界値などを考えることができる。 $N, L: C^\infty \text{ mfds}, \dim N = n, \dim L = l, F : N \rightarrow L, C^\infty \text{ map}$ とする。

定義 4.13.

(1) $p \in N$: critical point of F (臨界点)

\Leftrightarrow (定義) $(dF)_p : T_p N \rightarrow T_{F(p)} L$ 全射ではない。

(2) $p \in N$: regular point of F (正則点)

\Leftrightarrow (定義) $(dF)_p : T_p N \rightarrow T_{F(p)} L$ 全射である。

(3) $q \in L$: critical value of F (臨界値)

\Leftrightarrow (定義) $\exists p \in F^{-1}(q)$, critical point of F .

(4) $q \in L$: regular value of F (正則値)

\Leftrightarrow (定義) $\forall p \in F^{-1}(q), (dF)_p : T_p N \rightarrow T_{F(p)} L$ 全射。

定理 4.14. いまの状況で $q_0 \in L$ を F の正則値とする。

(1) $F^{-1}(q_0) \subset N$ は $(n-l)$ -dim C^∞ submfd である。

(2) $\forall p \in F^{-1}(q_0), T_p F^{-1}(q_0) = \text{Ker}(dF)_p \subset T_p N$.

証明. $q_0 \in O$, $\psi(q_0) = 0$ をみたく L の chart (O, ψ, W) をとる⁴. このとき次がなりたつ

$$\begin{aligned}
 & \forall p \in F^{-1}(q_0), \exists (U, \varphi, V) : \text{chart of } N, \\
 (*1) \quad & \text{s.t., } p \in U, \varphi(p) = 0, F(U) \subset O, \\
 & \forall (x_1, \dots, x_n) \in V, (\psi F \varphi^{-1})(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_l)
 \end{aligned}$$

(*1) の証明. まず $p \in U_0$, $\varphi_0(p) = 0$ をみたく N の chart (U_0, φ_0, V_0) をとる. U_0 を $U_0 \cap F^{-1}(O) (\ni p)$ に, V_0 を $\varphi_0(U_0 \cap F^{-1}(O))$ にとりかえると $F(U_0) \subset O$ および $\varphi_0 : U_0 \xrightarrow{\cong} V_0$ がなりたつ. $V_0^{\text{open}} \subset \mathbb{R}^n$ から $W^{\text{open}} \subset \mathbb{R}^l$ への C^∞ 写像

$$\psi F \varphi_0^{-1} : V_0 \rightarrow W$$

について $\text{rank } J(\psi F \varphi_0^{-1})_0 = \text{rank } (dF)_p = l$ であるから、定理 1.7 (陰函数定理) により

$$\begin{aligned}
 & 0 \in \exists V_1^{\text{open}} \subset V_0, 0 \in \exists V^{\text{open}} \subset \mathbb{R}^m, \varphi_1 : V_1 \xrightarrow{\cong} V, C^\infty \text{ diffeo} \\
 & \text{s.t., } \varphi_1(p) = 0, \forall (x_1, \dots, x_n) \in V, (\psi F \varphi_0^{-1} \varphi_1^{-1})(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_l)
 \end{aligned}$$

となる。そこで $U := \varphi_0^{-1}(V_1)$, $\varphi := \varphi_1 \varphi_0 : U \xrightarrow{\cong} V$ とおけばよい。□

(1) このとき $F^{-1}(q_0) \cap U = \varphi^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-l})$ である。 $p \in F^{-1}(q_0)$ は任意だから $F^{-1}(q_0) \subset N$ は $(n-l)$ -dim C^∞ submfd である。

(2) 補題 4.12 の証明の (*) により $T_p F^{-1}(q_0) = (d\varphi)_p^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-l})$ である。ここで

$$(*2) \quad \{0\} \times \mathbb{R}^{n-l} = \text{Ker}(J(\psi F \varphi^{-1})_0)$$

および可換図式

$$\begin{array}{ccc}
 T_p N & \xrightarrow{(dF)_p} & T_{q_0} L \\
 (d\varphi)_p \downarrow \cong & & \cong \downarrow (d\psi)_{q_0} \\
 \mathbb{R}^n & \xrightarrow{J(\psi F \varphi^{-1})_0} & \mathbb{R}^l
 \end{array}$$

に注意する。

$$\begin{aligned}
 T_p F^{-1}(q_0) &= (d\varphi)_p^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-l}) \stackrel{(*2)}{=} (d\varphi)_p^{-1} \text{Ker}(J(\psi F \varphi^{-1})_0) \\
 &= \text{Ker}(J(\psi F \varphi^{-1})_0 (d\varphi)_p) \stackrel{(*3)}{=} \text{Ker}((d\psi)_{q_0} (dF)_p) = \text{Ker}((dF)_p)
 \end{aligned}$$

となる。これが示すべきことであった。

以上で定理が示された。□

例. 直交群 $O(n)$, $n \geq 1$, を思い出す。記号は第2回のときのものを使う。 C^∞ 写像 $F : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Sym}_n(\mathbb{R})$, $A \mapsto {}^t A A$, は単位行列 $I \in \text{Sym}_n(\mathbb{R})$ を正則値にもち、 $O(n) = F^{-1}(I)$ であった。任意の $A \in O(n)$ と $X \in M_n(\mathbb{R}) = T_A M_n(\mathbb{R})$ について、 $(JF)_A(X) = {}^t X A + {}^t A X = {}^t X A + A^{-1} X = ({}^t X + A^{-1} X A^{-1}) A$ だから $T_A O(n) = \{X \in M_n(\mathbb{R}); {}^t X = -A^{-1} X A^{-1}\}$ となる。とくに $T_I O(n) = \{X \in M_n(\mathbb{R}); {}^t X = -X\}$ は交代行列全体のベクトル空間である。

⁴必要なら平行移動する。

[Sard の定理]

臨界値に関して次の Sard の定理は基本的であり、幾何的な直感を支える定理である。

定理 4.15 (Sard の定理). N, L : 第二可算公理をみたす C^∞ mfd, $F : N \rightarrow L$: C^∞ 写像とする。このとき、 $\text{Crit}(F) := \{q \in L; \text{critical value of } F\}$ は L において (Lebesgue) 測度 0 である。つまり、 L の任意の chart (O, ψ, W) について $\psi(\text{Crit}(F) \cap O) \subset W \subset \mathbb{R}^l$ は (外) 体積 0 である。

$\dim N \leq \dim L$ の場合の証明. N および L を、それぞれ第二可算公理をみたす C^∞ 多様体とし、 $f : N \rightarrow L$ を C^∞ 写像とする。Sard の定理 (定理 4.15) は L における f の臨界値全体の集合が測度 0 であることを述べている。Sard の定理は N と L の次元について何らの制約なしに成り立つが、ここでは G. de Rham, 'Differential Manifolds,' pp.10-11 に基づいて $\dim N \leq \dim L$ の場合に限って証明を与える。一般の場合の証明は、J.W. ミルナー「微分トポロジー講義」(丸善) 第 3 章、M.W. ハーシュ「微分トポロジー」(丸善) §3.1 などを参照。

それでは $\dim N \leq \dim L$ とする。必要なら N に球面 S^m , $m = \dim L - \dim N$, を直積し、第一射影 $N \times S^m \rightarrow N$ を合成することにより、 $\dim N = \dim L = n \geq 1$ の場合に帰着される。 N は第二可算公理をみたすから、座標近傍に含まれる可算無限個の n 次元立方体で覆われる。そこで $N = I^n$, $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, の場合に帰着される。 L の座標近傍系を考えると $L = \mathbb{R}^n$ の場合に帰着される。したがって、次の定理を証明すれば充分である。

定理 4.15a. (Sard の定理 (Sard's theorem)) $n \geq 1$ とし、 $f : I^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を C^∞ 写像とする⁵。このとき、 f の臨界値全体の集合は \mathbb{R}^n において測度 0 である。

証明. $\|\cdot\|$ を Euclid ノルムとする。 $m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, $m \geq 1$, について $\|A\| := \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (a_{ij})^2 \right)^{1/2}$ とおく。第 1 回に示したように、 A を線型写像 $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ とみなすとき、任意の $v = {}^t(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ について $\|Av\| \leq \|A\| \|v\|$ がなりたつ。

写像 f を $f = (f_1, \dots, f_n)$ のように成分表示する。 f の Jacobi 行列 $(Jf)_x = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$, $x \in I^n$, および、各成分 f_k の Hesse 行列 $(Hf_k)_x = \left(\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$, $x \in I^n$, $1 \leq k \leq n$,

を考える。これらはコンパクト空間 I^n 上の連続関数である。 $\|(Hf)_x\| := \left(\sum_{k=1}^n \|(Hf_k)_x\|^2 \right)^{1/2}$ と表すことにする。 $A := \sup_{x \in I^n} \|(Jf)_x\|$ および $B := \sup_{x \in I^n} \|(Hf)_x\|$ とおく。 I^n はコンパクトだから A, B は (有限確定の) 非負実数である。

補題 4.15b. 任意の $x, y \in I^n$ について次がなりたつ

$$\|f(y) - f(x)\| \leq A \|y - x\|,$$

$$\|f(y) - f(x) - (Jf)_x(y - x)\| \leq \frac{1}{2} B \|y - x\|^2.$$

補題の証明. 任意の $t \in [0, 1]$ について $(1-t)x + ty \in I^n$ であることに注意する。そこで Chain rule により

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f((1-t)x + ty) dt = \int_0^1 (Jf)_{((1-t)x + ty)}(y - x) dt$$

⁵正確に言えば \mathbb{R}^n における I^n の開近傍で f は定義されている。

となる。そこで

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \int_0^1 \|(Jf)_{((1-t)x+ty)}(y-x)\| dt \leq \int_0^1 \|(Jf)_{((1-t)x+ty)}\| \|y-x\| dt \leq A\|y-x\|$$

および

$$\begin{aligned} \|f(y) - f(x) - (Jf)_x(y-x)\| &= \left\| \int_0^1 ((Jf)_{((1-t)x+ty)} - (Jf)_x)(y-x) dt \right\| \\ &\leq \left(\int_0^1 \|(Jf)_{((1-t)x+ty)} - (Jf)_x\| dt \right) \|y-x\| \end{aligned}$$

がなりたつ。ここで補題の証明の最初に述べたことと同様にして

$$\begin{aligned} \|(Jf)_{((1-t)x+ty)} - (Jf)_x\| &= \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds} (Jf)_{((1-st)x+sty)} ds \right\| \\ &\leq t \int_0^1 \|(Hf)_{((1-st)x+sty)}\| \|y-x\| ds \leq tB\|y-x\| \end{aligned}$$

であるから $\|f(y) - f(x) - (Jf)_x(y-x)\| \leq (\int_0^1 t dt) B\|y-x\|^2 = \frac{1}{2} B\|y-x\|^2$ が得られる。補題が示された。□

証明の本論に入る。任意の正の整数 $N \geq 1$ をとる。 I^n の各辺を N 等分して N^n 個の n 次元立方体に分割する。分割してえられる n 次元立方体の直径を d とすると $d = \sqrt{n}/N$ である。 $E \subset I^n$ を f の臨界点全体の集合とする。このような n 次元立方体の 1 つを J とし、 $x \in J \cap E$ が存在したとする。補題により、任意の $y \in J$ について

$$\|f(y) - f(x) - (Jf)_x(y-x)\| \leq \frac{1}{2} B d^2$$

である。いま $\text{rank}(Jf)_x \leq n-1$ だから、点 $f(x)$ を通る \mathbb{R}^n の $n-1$ 次元超平面 Π が存在して $f(x) + (Jf)_x(y-x) \in \Pi$ である。そこで $f(y)$ は Π に平行な厚さ Bd^2 の領域に属する。また、補題により $\|f(y) - f(x)\| \leq Ad$ である。したがって $f(y)$ は半径 Ad の $(n-1)$ 次元円板に長さ Bd^2 の区間を直積した「 n 次元円柱」に属することになる。そこで C を $(n-1)$ 次元単位円板の $(n-1)$ 次元体積とすると、 $f(J)$ の (n) 次元体積は $C(Ad)^{n-1}Bd^2 = A^{n-1}BCd^{n+1}$ で抑えられる。いま分割してえられる n 次元立方体は N^n 個あるので $f(E)$ の (n) 次元体積は $N^n A^{n-1}BCd^{n+1} = A^{n-1}BC(\sqrt{n})^{n+1}/N$ で抑えられる。 $A^{n-1}BC(\sqrt{n})^{n+1}$ は定数であって N はいくらでも大きくとることができるから $f(E)$ は (n) 次元体積 0 つまり測度 0 である。定理が示された。□

□

系 4.16. いまの状況で、さらに $\dim N \not\leq \dim L$ とすると、 F は全射ではない。

証明. $\dim N \not\leq \dim L$ の仮定により $\text{Crit}(F) = F(N)$ である。これは Sard の定理により L 全体とはならない。□

[函数の極値判定]

ここまでの写像の微分を踏まえて C^∞ 函数の極値判定を考えるのは当然である。 $M: m\text{-dim}$ C^∞ mfd, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$: C^∞ 函数とする。 M の chart (U, φ, V) , $\varphi = (x_1, \dots, x_m)$ について f が $p \in U$ において極大または極小ならば

$$1 \leq \forall i \leq m, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \left(= \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)) \right) = 0$$

である。実際、 $f \circ \varphi^{-1}$ は $\varphi(p)$ において極値をとるからである。つまり

$$(df)_p = 0 \in T_p^*M$$

いいかえれば p は f の critical point である。

逆に $p \in U$ が f の critical point であるとき、極値判定に **Hesse** 行列 (Hessian)

$$H(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} := \left(\frac{\partial^2(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i \partial x_j}(\varphi(p)) \right)_{1 \leq i, j \leq m} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right)_{1 \leq i, j \leq m}$$

を用いることができる。つまり実対称行列 $H(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}$ の固有値が、

すべて負ならば f は p で極大であり、
 すべて正ならば f は p で極小であり、
 正も負もあるならば p で極大でも極小でもない。

一般に、 m 次実対称行列 H について

ν_+ : H の正の固有値の個数

ν_- : H の負の固有値の個数

とすると、組 (ν_+, ν_-) を H の符号 (signature) という。

定理 4.17 (Sylvester). 任意の $P \in GL_m(\mathbb{R})$ について tPHP の符号は H の符号と一致する。

証明. は、まともな線型代数の教科書ならば必ず書いてある。ホモトピー同値 $\{u \in \mathbb{R}^m; {}^t_uHu = \pm 1\} \simeq S^{\nu_\pm - 1}$ と、次元の異なる球面が互いにホモトピー同値ではないことからわかる。□

補題 4.18. $p \in M$ が f の critical point のとき、Hessian $H(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}$ の符号は chart φ のとり方によらない。

証明. 別の chart $\psi = (y_1, \dots, y_m)$ をとる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y_j} &= \sum_{l=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial y_j} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j}(p) &= \sum_{l=1}^m \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_l} \right) (p) \frac{\partial x_l}{\partial y_j}(p) + \sum_{l=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_l}(p) \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{\partial x_l}{\partial y_j} \right) (p) \\ &= \sum_{k,l=1}^m \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_l} \right) (p) \frac{\partial x_k}{\partial y_i}(p) \frac{\partial x_l}{\partial y_j}(p) \end{aligned}$$

となる。ここで $(df)_p = 0$ により $\frac{\partial f}{\partial x_l}(p) = 0$ であることをつかった。 $J(\varphi \circ \psi^{-1})_{\psi(p)} = (\frac{\partial x_k}{\partial y_i}(p))_{1 \leq k, i \leq m}$ であることから

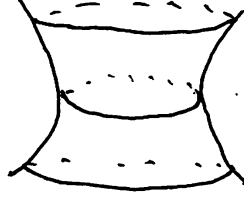
$$H(f \circ \psi^{-1})_{\psi(p)} = {}^tJ(\varphi \circ \psi^{-1})_{\psi(p)} H(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} J(\varphi \circ \psi^{-1})_{\psi(p)}$$

がわかる⁶。あとは Sylvester の定理による。 \square

組 (ν_+, ν_-) を f の臨界点 p における符号という。

(注意) $\nu_+ + \nu_- = m$ つまり $\det H(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} \neq 0$ のとき f は p において非退化 (non-degenerate) であるといい、 ν_- を f の p における Morse index という。

例. $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + 4y^2 - z^2 = 1\}$ (単葉双曲面)



$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x^2 + 4y^2 - z^2$, とすると $M = F^{-1}(1)$ である。 $p = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ について $(JF)_p = (2a, 8b, -2c)$ だから

$$(JF)_p = 0 \iff p = (a, b, c) = (0, 0, 0)$$

である。とくに $1 \in \mathbb{R}$ は F の正則値であり、 $M = F^{-1}(1) \subset \mathbb{R}^3$ は 2 次元 C^∞ 部分多様体である。また $p \in M$ について

$$T_p M = \text{Ker}(JF)_p = \{v \in \mathbb{R}^3; (a, 4b, -c)v = 0\}$$

となる。

C^∞ 関数 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$, を M 上で考える。 $(Jf)_p = (2a, 2b, 2c)$ だから

$$\begin{aligned} & p = (a, b, c) \in M \text{ が } f: M \rightarrow \mathbb{R} \text{ の臨界点} \\ \iff & (df)_p = 0 \in T_p^* M \\ \iff & \forall v \in \mathbb{R}^3, (a, 4b, -c)v = 0 \Rightarrow (a, b, c)v = 0 \\ \iff & (a, 4b, -c) // (a, b, c) \\ \iff & p = (a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c) \end{aligned}$$

となる⁷。ここで $-c^2 \neq 1$ より $p = (0, 0, c)$ はありえない。そこで $p = (\pm 1, 0, 0)$ または $(0, \pm \frac{1}{2}, 0)$ である。

つぎに、それぞれの臨界点における f の符号を求める。

(重要な注意) \mathbb{R}^3 での Hessian Hf (今の場合、この固有値は全て正である) を計算しても意味がない。 M の chart を使う必要がある。2 階微分 (Hessian) の計算は、1 階微分の計算よりはるかに難しい。

$p = (\pm 1, 0, 0)$ のまわりでは (注意 1.8 で述べたように) $(x, y, z) \in M \mapsto (y, z) \in \mathbb{R}^2$ は chart である。逆は $(s, t) \mapsto (\pm \sqrt{1+t^2-4s^2}, s, t)$ によって与えられる。

$$f(\pm \sqrt{1+t^2-4s^2}, s, t) = 1 + t^2 - 4s^2 + s^2 + t^2 = 1 + 2t^2 - 3s^2$$

⁶このことから、Hessian Hf が f の critical point p での接空間 $T_p M$ 上の二次形式として座標のとり方によらず決まることもわかる。

⁷3 番目の \iff について補足しておく。有限次元実ベクトル空間 V とその双対 V^* を考える。実戦型部分空間 $W \subset V^*$ について $W^\perp := \{v \in V; \forall w \in W, w(v) = 0\}$ と定める。3 番目の \iff の上側の主張は $\langle (a, 4b, -c) \rangle^\perp \subset \langle (a, b, c) \rangle^\perp$ と表される。これは $\langle (a, b, c) \rangle = \langle (a, b, c) \rangle^{\perp\perp} \subset \langle (a, b, c) \rangle^{\perp\perp} = \langle (a, b, c) \rangle$ と同値であるから下側の主張とも同値である。

であるから、Hessian は $\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ であり、符号は $(1, 1)$ である。とくに極大でも極小でもない。

$p = (0, \pm\frac{1}{2}, 0)$ のまわりでは（注意 1.8 で述べたように） $(x, y, z) \in M \mapsto (x, z) \in \mathbb{R}^2$ は chart である。逆は $(s, t) \mapsto (s, \pm\frac{1}{2}\sqrt{1-s^2+t^2}, t)$ によって与えられる。

$$f(s, \pm\frac{1}{2}\sqrt{1-s^2+t^2}, t) = s^2 + \frac{1}{4}(1-s^2+t^2) + t^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}s^2 + \frac{5}{4}t^2$$

であるから、Hessian は $\begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 5/2 \end{pmatrix}$ であり、符号は $(2, 0)$ であり、極小である。 \square

次回は横断性、うめこみ、はめこみについて述べる。

[例題演習]

例題演習 第6回

実数 $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1}$ を考える。 n 次元単位球面 S^n 上の C^∞ 関数 $f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i^2$ について、 f の臨界点をすべて求め、それぞれにおける f の Hesse 行列の符号を求めよ。