幾何学 I　　第 4 回　　　　河澄響矢

今回の内容: 商位相空間の復習, 複素射影空間, 実射影空間,
同次多項式, Lie 群, Hamilton の四元数, 群作用.

§3. 多様体の例（前半）

[商位相空間の復習]

商（位相）空間の復習. X を位相空間とし、$\sim$ を同値関係とする。同値関係は $X \times X$ の部分集合とみなせる。$X \times X$ の部分集合とみなすとき $\sim = R \subset X \times X$ と表す。つまり $R = \{(x_0, x_1) \in X \times X;\ x_0 \sim x_1\}$ である。$x \in X$ について $[x] := \{x' \in X; x \sim x'\} \subset X$ と表し、x の $\sim$ による**同値類**（equivalence class）と呼ぶ。X の $\sim$ による**商集合**（quotient set）$X/\sim$ とは同値類全体の集合のことである

$$X/\sim = X/R := \{[x];\ x \in X\} \subset (X \text{ の冪集合}).$$

写像

$$\pi : X \to X/\sim, \quad x \mapsto [x],$$

を**商写像**（quotient map, 標準射影）とよぶ[1]。部分集合 $O \subset X/\sim$ について、

$$O \overset{\text{open}}{\subset} X/\sim \quad \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \quad \pi^{-1}(O) \overset{\text{open}}{\subset} X$$

と定めると位相の公理をみたす（各自で復習すること）。この定義による位相が入った商集合 $X/\sim$ を**商 (位相) 空間**（quotient space）と呼ぶ。

生成する同値関係. （ここだけの記号として）部分集合 $S \subset X \times X$ について

$$R_S := \bigcap_{S \subset R:\ \text{同値関係}} R \subset X \times X$$

と定める。R_S は、同値関係の公理（反射律、対称律、推移律）を充たすので、S の**生成する同値関係**（the equivalence relation generated by S）と呼ばれる。$(x_0, x_1) \in X \times X$ が R_S に属するための必要充分条件は、$x_0 = x_1$ または整数 $n \geq 1$ と点列 $x_0 = y_0, y_1, \ldots, y_n = x_1 \in X$ が存在して各 $1 \leq i \leq n$ について $(y_{i-1}, y_i) \in S$ または $(y_i, y_{i-1}) \in S$ が成り立つことである。

接着空間. Y, Z を位相空間、$B \subset Y$ を部分空間、$\varphi : B \to Z$ を連続写像とする。Y と Z の disjoint 和を X とし: $X := Y \coprod Z$、$X \times X$ の部分集合 $\{(b, \varphi(b));\ b \in B\}$ の生成する同値関係を $\sim$ とする。商空間 $X/\sim$ を $Y \cup_\varphi Z$ などと書き、接着空間と呼ぶ。特に Z が一点からなる空間であるとき、$X/\sim = Y/B$ などと書き、Y において B を一点に潰した空間と呼ぶ。具体的な例として D^n の境界の S^{n-1} を一点につぶしてえられる位相空間 D^n/S^{n-1} は S^n に同相である[2]。

---

[1]商写像は開写像とは限らない。例えば、単位区間 $[0, 1]$ について 0 と 1 を貼り合わせる商写像は、単位区間の開集合 $]1/2, 1]$ を開ではない集合の上に写像する。

[2]$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| \leq 1\}$ とみなし、連続写像 $D^n \to S^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, $x \mapsto (2\sqrt{1 - \|x\|^2}x, 1 - 2\|x\|^2)$ を考えればよい。

等化写像（identification map）

定義-補題 3.1. 位相空間 X から位相空間 Y の上への連続全射 $p: X \to Y$ について、次の 2 つの条件は互いに同値である

(a) 任意の部分集合 $O \subset Y$ について次の同値がなりたつ

$$O \overset{\text{open}}{\subset} Y \Longleftrightarrow p^{-1}(O) \overset{\text{open}}{\subset} X.$$

（つまり Y は p の定める同値関係による X の商空間である。）

(b) 任意の位相空間 Z と写像 $f: Y \to Z$ について、$f: Y \to Z$ が連続であるための必要充分条件は、合成写像 $f \circ p: X \to Z$ が連続であることである（下図参照）。

条件 (a) (b) を充たすことを連続全射 $p: X \to Y$ は**等化写像**（identification map）であるという。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f\circ p"] \arrow[d, "p"'] & Z \\ Y \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

証明. <u>(a)⇒(b)</u> (⇒) p が連続写像だから明らか。(⇐) $f \circ p$ が連続だから、任意の開集合 $U \overset{\text{open}}{\subset} Z$ について $p^{-1}(f^{-1}(U)) = (f \circ p)^{-1}(U) \overset{\text{open}}{\subset} X$ である。(a) より $f^{-1}(U) \overset{\text{open}}{\subset} Y$ である。

<u>(b)⇒(a)</u> $Z = \{0, 1\}$ とし、その開集合は $\emptyset$, $\{0\}$, $\{0, 1\}$ であるとする。このとき、任意の位相空間 W について一対一対応

$$\begin{aligned} \{f: W \to Z;\ \text{連続写像}\} &\cong \{O \overset{\text{open}}{\subset} W\} \\ f &\mapsto f^{-1}(0) \end{aligned}$$

が成り立つ。(b) において、この Z を取ったものは (a) に他ならない。 □

等化写像の例としては、以下のようなものがある。

(1) 商写像 $\pi: X \to X/\!\sim$.

(2) X が compact で Y が Hausdorff 空間であるとき、任意の全射連続写像 $p: X \to Y$ は等化写像である。

(3) 位相空間 X の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ について次の写像は等化写像である

$$\coprod_{\alpha \in A} U_\alpha \to X, \quad x_\alpha \in U_\alpha \mapsto x_\alpha \in X.$$

(4) 等化写像 $p: X \to Y$ と任意の開集合 $W \overset{\text{open}}{\subset} Y$ （または閉集合 $W \overset{\text{closed}}{\subset} Y$）について、制限 $p|_{p^{-1}(W)}: p^{-1}(W) \to W$ は等化写像である。

[群作用による商空間]

商空間の典型例を与えるのが群作用である。

定義. G: **位相群**（topological group）

$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 1) G: 位相空間

2) G: 群

3) 積 $G \times G \to G$, $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$, と逆 $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$, はともに連続写像である。

（注意）任意の群は離散位相をいれて位相群とみなせる[3]。

[3]離散位相の直積位相 $G \times G$ が再び離散的であることに注意せよ。

以下 G を位相群とする。単位元を $1 \in G$ と表す。X を位相空間とする。

定義. $G \curvearrowright X$: 連続に（左）作用している。
$\overset{\text{定義}}{\iff}$ 次をみたす**作用**（action）とよばれる連続写像 $\mu : G \times X \to X$ が与えられている[4]

$$\begin{aligned}&\forall x \in X,\ \mu(1, x) = x,\\ &\forall g_1, \forall g_2 \in G, \forall x \in X,\ \mu(g_1 g_2, x) = \mu(g_1, \mu(g_2, x)).\end{aligned}$$

$\mu(g, x) = g(x) = gx$ などと略記することが多い。

このとき、任意の $g \in G$ について、写像

$$g = \mu(g, \cdot) : X \to X, \quad x \mapsto \mu(g, x)$$

は同相写像である。実際、$\mu(g, \cdot), \mu(g^{-1}, \cdot) : X \to X$ は連続写像であり、任意の $x \in X$ について

$$\mu(g^{-1}, \mu(g, x)) = \mu(1, x) = x, \quad \mu(g, \mu(g^{-1}, x)) = \mu(1, x) = x$$

だから、互いに逆である。

群作用は、以下のように X 上の同値関係を定める

$$x_0 \sim x_1 \quad \iff \quad \exists g \in G,\ x_1 = g x_0.$$

反射律は作用の条件 $\mu(1, x) = x$ により、推移律は $\mu(g_1 g_2, x) = \mu(g_1, \mu(g_2, x))$ により、対称律は g^{-1} をとることでわかる。この同値関係 $\sim$ によって

$$X/G := X/\sim$$

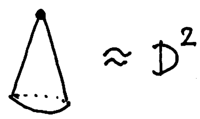
と定義する。作用の商空間または**軌道空間**（orbit space）とよばれる。この場合には商写像 $\pi : X \to X/G$ は開写像になる。実際、次がなりたつからである

$$\forall U \overset{\text{open}}{\subset} X, \quad \pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in G} gU \overset{\text{open}}{\subset} X.$$

例. $D^2 = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \le 1\}$, $m \ge 1$ とする。巡回群 $\mathbb{Z}/m$ を D^2 に

$$(\mathbb{Z}/m) \times D^2 \to D^2, \quad (k \bmod m, z) \mapsto e^{2\pi\sqrt{-1}k/m} z,$$

によって作用させる。商空間 $D^2/(\mathbb{Z}/m)$ は D^2 に同相である（下図参照）。



[4] X の位相構造を問題にしないのならば、群準同型 $G \to \mathrm{Aut}(X)$ が与えられている、と言ったほうが見通しがよい。しかし、X に位相構造を入れて作用の連続性を考えるならば、$\mathrm{Aut}(X)$ の位相構造も考える必要がある。X が compact Hausdorff 空間ならば compact-open topology を考えればよいが、そうでないときは話が面倒になる。さらに X が C^∞ 多様体の場合には $\mathrm{Aut}(X)$ には無限次元 Lie 群の構造を考えるべきであり、さらに話が面倒になる。つまり、このような定式化の方が簡単なのである。

実際、写像

$$D^2/(\mathbb{Z}/m) \to D^2, \quad z \bmod \mathbb{Z}/m \mapsto z^m,$$

は compact 空間 $D^2/(\mathbb{Z}/m)$ から Hausdorff 空間 D^2 への well-defined な連続全単射だから同相写像である[5]。

[射影空間]

ここから本論に入る。

射影空間（projective space）. $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とし、$n \geq 1$ とする。

$\mathbb{K}^\times := \mathbb{K} \setminus \{0\}$ を $\mathbb{K}$ の乗法群とする。

scalar 倍による作用 $\mathbb{K}^\times \curvearrowright \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ が[6]定める同値関係 $\sim$ による商空間を

$$\mathbb{K}P^n \overset{\text{定義}}{=} (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\})/\!\sim\, = (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{K}^\times$$

と表し、n 次元 $\mathbb{K}$ 射影空間とよぶ。同値関係 $\sim$ を書き下す。$z=(z_1,\dots,z_{n+1}), w=(w_1,\dots,w_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ について

$$z \sim w \iff \exists\lambda \in \mathbb{K}^\times, w=\lambda z \iff \exists\lambda \in \mathbb{K}^\times, 1 \leq \forall i \leq n+1,\ w_i = \lambda z_i$$

である。そこで $\sim$ に関する同値類

$$[z]=[z_1:z_2:\cdots:z_{n+1}] := z \bmod \sim\ \in \mathbb{K}P^n$$

は比であって、$\mathbb{K}P^n$ は比の空間である[7]。同時に $[z]$ は 1 次元 $\mathbb{K}$ 線型部分空間 $\mathbb{K}z \subset \mathbb{K}^{n+1}$ にも対応している。そこで、$\mathbb{K}P^n = \{L \subset \mathbb{K}^{n+1};\ 1$ 次元 $\mathbb{K}$ 線型部分空間 $\}$ と見ることもできる。部分空間の次元を一般化したものが Grassmann 多様体である。位相をいれるために、商写像を

$$\varpi : \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{K}P^n, \quad z \mapsto [z],$$

と表す。また、$\|z\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1}|z_i|^2}$ と表す。

補題 3.2. $\mathbb{K}P^n$ は Hausdorff 空間である。

証明. $z', z'' \in \mathbb{K}^{n+1}\setminus\{0\}, [z'] \neq [z''] \in \mathbb{K}P^n$ とする。$\{z', z''\}$ は $\mathbb{K}$ 線型独立であるから、$\mathbb{K}^{n+1}$ の基底の一部分になる。この基底をつかうと $\exists h : \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}$, $\mathbb{K}$-線型写像, s.t., $h(z') = \|z'\|,\ h(z'')=0$ となる。この h を使って

$$f : \mathbb{K}P^n \to \mathbb{R}, \quad [z] \mapsto f([z]) := \frac{|h(z)|}{\|z\|}$$

と定める。well-defined であることは $\frac{|h(\lambda z)|}{\|\lambda z\|} = \frac{|\lambda||h(z)|}{|\lambda|\|z\|} = \frac{|h(z)|}{\|z\|}$ からわかる。$f \circ \varpi : \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ は連続だから、商位相の入れ方（補題 3.1）により f は連続である。このとき $[z'] \in f^{-1}(]\frac{2}{3},\infty[)$, $[z''] \in f^{-1}(]-\infty,\frac{1}{3}[)$ であって、$f^{-1}(]\frac{2}{3},\infty[) \cap f^{-1}(]-\infty,\frac{1}{3}[) = \emptyset$ である。つまり $[z']$ と $[z'']$ を分離する開近傍がとれた。 □

[5] compact 空間から Hausdorff 空間への連続全単射が同相写像であるという事実は、商空間を考えるときに有用である。

[6] $\mathbb{K}^{n+1}$ から原点 $\{0\}$ が取り除かれていることに注意せよ。これは商空間を Hausfdorff 空間にするために必要である。

[7] そもそも比とは同値類である。

Hopf fibration（$\mathbb{K}=\mathbb{C}$）

$S^{2n+1}=\{z=(z_1,\dots,z_{n+1})\in\mathbb{C}^{n+1};\ \|z\|=1\}$ とみなすことができる。S^{2n+1} は有界閉集合だから compact である。商写像 ϖ の S^{2n+1} への制限

$$\pi:=\varpi|_{S^{2n+1}}:S^{2n+1}\to\mathbb{C}P^n$$

を **Hopf fibration** とよぶ。

π は全射である。$\forall z\in\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$, $z/\|z\|\in S^{2n+1}$, $\pi(z/\|z\|)=[z]$ だからである。

$\mathbb{C}P^n$ は compact である。S^{2n+1} は compact で $\mathbb{C}P^n=\pi(S^{2n+1})$ だからである。

scalar 倍による作用 $\mathbb{C}^\times\curvearrowright\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$ を制限して $S^1=\{z\in\mathbb{C};\ |z|=1\}$ は S^{2n+1} に作用する。このとき同相

$$S^{2n+1}/S^1\approx\mathbb{C}P^n$$

がなりたつ。π は compact 空間 S^{2n+1}/S^1 から Hausdorff 空間 $\mathbb{C}P^n$ の上への連続全単射を誘導するからである。同様に

$$S^n/\{\pm1\}\approx\mathbb{R}P^n$$

がなりたつ。とくに $\mathbb{R}P^n$ は compact である。

座標近傍. $1\le i\le n+1$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$.

$$U_i:=\{[z]=[z_1:\dots:z_{n+1}]\in\mathbb{K}P^n;\ z_i\neq0\}\overset{\text{open}}{\subset}\mathbb{K}P^n$$

とおく。開集合であることは $\{z_i\neq0\}\overset{\text{open}}{\subset}\mathbb{K}^{n+1}\setminus\{0\}$ による。任意の $[z]=[z_1:\dots:z_{n+1}]\in\mathbb{K}P^n$ について、少なくとも一つの z_i は $\neq0$ なので $\bigcup_{i=1}^{n+1}U_i=\mathbb{K}P^n$ である。

$$\varphi_i:U_i\to\mathbb{K}^n,\quad [z]\mapsto\left(\frac{z_1}{z_i},\dots,\frac{z_{i-1}}{z_i},\frac{z_{i+1}}{z_i},\dots,\frac{z_{n+1}}{z_i}\right)$$

と定める。$(\lambda z_j)/(\lambda z_i)=z_j/z_i$ だから well-defined であり、$\varphi_i\circ\varpi:\varphi^{-1}(U_i)=\{z_i\neq0\}\to\mathbb{K}^n$ は連続だから φ_i も連続である。逆写像 ${\varphi_i}^{-1}$ は

$${\varphi_i}^{-1}(\zeta_1,\dots,\zeta_n)=[\zeta_1:\dots:\zeta_{i-1}:1:\zeta_i:\dots:\zeta_n],\quad(\zeta_1,\dots,\zeta_n)\in\mathbb{K}^n$$

によって与えられる。実際、

$$\left[\frac{z_1}{z_i}:\dots:\frac{z_{i-1}}{z_i}:1:\frac{z_{i+1}}{z_i}:\dots:\frac{z_{n+1}}{z_i}\right]=[z_1:\dots:z_{i-1}:z_i:z_{i+1}:\dots:z_{n+1}]$$
$$\left(\frac{\zeta_1}{1},\dots,\frac{\zeta_n}{1}\right)=(\zeta_1,\dots,\zeta_n)$$

となるからである。とくに φ_i は同相写像である。

次に貼り合わせを調べる。$i<j$ とする。$U_i\cap U_j=\{z_i\neq0 \text{ かつ } z_j\neq0\}$ であるが

$$\begin{aligned}
&\varphi_i(U_i\cap U_j)=\{(\zeta_1,\dots,\zeta_n)\in\mathbb{K}^n;\ \zeta_{j-1}\neq0\},\\
&\varphi_j(U_i\cap U_j)=\{(\zeta_1,\dots,\zeta_n)\in\mathbb{K}^n;\ \zeta_i\neq0\},\\
&\varphi_j{\varphi_i}^{-1}(\zeta_1,\dots,\zeta_n)=\left(\frac{\zeta_1}{\zeta_{j-1}},\cdots,\frac{\zeta_{i-1}}{\zeta_{j-1}},\frac{1}{\zeta_{j-1}},\frac{\zeta_i}{\zeta_{j-1}},\cdots,\frac{\zeta_{j-2}}{\zeta_{j-1}},\frac{\zeta_j}{\zeta_{j-1}},\cdots,\frac{\zeta_n}{\zeta_{j-1}}\right),\\
&\varphi_i{\varphi_j}^{-1}(\zeta_1,\dots,\zeta_n)=\left(\frac{\zeta_1}{\zeta_i},\cdots,\frac{\zeta_{i-1}}{\zeta_i},\frac{\zeta_{i+1}}{\zeta_i},\cdots,\frac{\zeta_{j-1}}{\zeta_i},\frac{1}{\zeta_i},\frac{\zeta_j}{\zeta_i},\cdots,\frac{\zeta_n}{\zeta_i}\right),
\end{aligned}$$

となり、$\varphi_j\varphi_i{}^{-1}$ と $\varphi_i\varphi_j{}^{-1}$ はともに C^∞ である[8]。したがって、$\mathbb{R}P^n$ は n 次元 C^∞ 多様体であり、$\mathbb{C}P^n$ は $2n$ 次元 C^∞ 多様体[9]である。

用語. z_i を**斉次座標**（homogeneous coordinate）とよび、$i \neq j$ についての z_j/z_i を**非斉次座標**（inhomogeneous coordinate）とよぶ。

商写像 $\varpi : \mathbb{K}^{n+1}\backslash\{0\} \to \mathbb{K}P^n$ は C^∞ 写像である。実際、$\{z_i \neq 0\} \subset \mathbb{K}^n$ 上で $\varphi_i{}^{-1}\varpi(z_1,\ldots,z_{n+1}) = (z_1/z_i,\ldots,z_{i-1}/z_i,z_{i+1}/z_i,\ldots,z_{n+1}/z_i)$ は C^∞ だからである。

補題 3.3. $W \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{K}P^n$, M: C^∞ 多様体および写像 $f : W \to M$ について次がなりたつ

$$f : C^\infty \text{ 写像} \quad \Longleftrightarrow \quad f\circ\varpi : \varpi^{-1}(W) \to M : C^\infty \text{ 写像}.$$

証明. $(\Rightarrow)$ ϖ が C^∞ であることから明らか。

$(\Leftarrow)$ C^∞ 写像

$$s_i : U_i \to \mathbb{K}^{n+1}\setminus\{0\}, \quad [z_1 : \cdots : z_{n+1}] \mapsto \left(\frac{z_1}{z_i},\ldots,\frac{z_{i-1}}{z_i},1,\frac{z_{i+1}}{z_i},\cdots,\frac{z_{n+1}}{z_i}\right)$$

は、$\varpi\circ s_i = 1_{U_i}$ をみたすから $f|_{W\cap U_i} = (f\circ\varpi)\circ(s_i|_{W\cap U_i})$ となるが、$f\circ\varpi$ と $s_i|_{W\cap U_i}$ はともに C^∞ だから $f|_{W\cap U_i}$ も C^∞ である。 □

例. 正則行列 $A \in GL_{n+1}(\mathbb{K})$ について、**射影変換**（projective transformation）

$$A : \mathbb{K}P^n \to \mathbb{K}P^n, \quad [z] \mapsto [Az]$$

は well-defined な C^∞ 写像である。（各自確かめよ。$A\circ\varpi$ は C^∞ だから射影変換 A も C^∞ である。）

$n = 1$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ とする。$S^2 = \{(w,t) \in \mathbb{C}\times\mathbb{R};\ |w|^2 + t^2 = 1\}$ とみなす。

補題 3.4. 写像

$$\psi : S^2 \to \mathbb{C}P^1, \quad ((0,-1)\neq)(w,t) \mapsto [w : 1+t], \quad (0,-1) \mapsto [1 : 0]$$

は C^∞ 微分同相である。逆写像 $\mathbb{C}P^1 \to S^2$ は次で与えられる

$$[z_1 : z_2] \mapsto \left(\frac{2z_1\overline{z_2}}{|z_1|^2+|z_2|^2}, \frac{-|z_1|^2+|z_2|^2}{|z_1|^2+|z_2|^2}\right).$$

証明. は省略するが、$(0,-1)$ の周りの様子だけ調べておく。$1 + t = 1 - \sqrt{1-|w|^2} = \dfrac{|w^2|}{1+\sqrt{1-|w|^2}}$ であるから、$[w : 1+t] = \left[1 : \dfrac{\overline{w}}{1+\sqrt{1-|w|^2}}\right]$ は $(0,-1)$ の周りで C^∞ である。 □

同様に

$$S^1 \cong \mathbb{R}P^1, \quad (x,y) \mapsto [x : 1+y]$$

がなりたつ。$S^1/\{\pm1\} \cong S^1$ でもある。

---

[8] $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ならば、さらに複素解析的である。

[9] さらに n 次元複素解析多様体である。

[同次多項式]

同次多項式（homogeneous polynomial） $\mathbb{K}$-係数多項式

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}) = \sum a_{k_1 k_2 \cdots k_n} {z_1}^{k_1} {z_2}^{k_2} \cdots {z_{n+1}}^{k_{n+1}}, \quad a_{k_1 k_2 \cdots k_n} \in \mathbb{K}$$

について f が m **次同次**（homogeneous of degree m）であるとは、条件

$$a_{k_1 k_2 \cdots k_n} \neq 0 \implies \sum\nolimits_{i=1}^{n+1} k_i = m$$

をみたすことをいう。以下、f は m 次同次であるとする。$f(\lambda z) = \lambda^m f(z)$ だから、**零点集合**（zero set）

$$\mathrm{Zero}(f) := \{[z] \in \mathbb{K}P^n;\ f(z) = 0\} \subset \mathbb{K}P^n$$

は well-defined である。これまでと同様に $U_i = \{z_i \neq 0\} \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{K}P^n$ とおくと、

$$\begin{aligned} & \mathrm{Zero}(f) \subset \mathbb{K}P^n \quad C^\infty \text{ 部分多様体} \\ \iff \ & 1 \leq \forall i \leq n+1,\ \mathrm{Zero}(f) \cap U_i \subset U_i \quad C^\infty \text{ 部分多様体} \end{aligned}$$

である。ここで

$$\mathrm{Zero}(f) \cap U_i \overset{\varphi_i}{\cong} \{(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{K}^n;\ f(\zeta_1, \ldots, \zeta_{i-1}, 1, \zeta_i, \ldots, \zeta_n) = 0\}$$

であるから、**ここだけの記号として**

$$f_i(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) := f(\zeta_1, \ldots, \zeta_{i-1}, 1, \zeta_i, \ldots, \zeta_n)$$

と表すことにする。$\mathrm{Zero}(f) \cap U_i$ が U_i の C^∞ 部分多様体であるための充分条件として

$$1 \leq \forall i \leq n+1,\ f_i : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K} \text{ は } 0 \text{ を正則値にもつ}$$

がある[10]。

例. **Klein quartics**（Klein 四次曲線[11]）

$$K := \{[X : Y : Z] \in \mathbb{C}P^2;\ X^3Y + Y^3Z + Z^3X = 0\}$$

$\{Z \neq 0\}$ 上では $f_3(z, w) = z^3 w + w^3 + z$ であるが、$f_3 : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ は 0 を正則値にもつ[12]。$\{X \neq 0\}$, $\{Y \neq 0\}$ も同様である。（または、方程式の対称性による。）かくして $K \subset \mathbb{C}P^2$ は (実) 2 次元 C^∞ 多様体である。これは種数（genus）3 の閉 Riemann 面であることが知られている（下図参照）。

[10] 必要条件ではない。たとえば $(f(z_1, \ldots, z_{n+1}))^2$ は同じ零点集合を定める。

[11]（無視してよい註）level 7 modular 曲線の compact 化なので $PSL_2(\mathbb{F}_7)$ という位数の大きい有限群が複素解析的に作用している。

[12] $\dfrac{\partial f_3}{\partial z} = 3z^2 w + 1,\ \dfrac{\partial f_3}{\partial w} = z^3 + 3w^2$ であるから、連立方程式

$$\begin{cases} z^3 w + w^3 + z = 0 \\ 3z^2 w + 1 = 0 \\ z^3 + 3w^2 = 0 \end{cases}$$

が解をもたないことを示せばよい。そのために、解 (z, w) をもつと仮定して矛盾を導く。2 番目の式から $zw \neq 0$ であり、$w = -3^{-1} z^{-2}$ である。これを 3 番目の式に代入して $z^3 + 3^{-1} z^{-4} = 0$ つまり $z^7 = -3^{-1}$ となる。そこで 1 番目の式から $0 = -3^{-1} z^3 z^{-2} - 3^{-3} z^{-6} + z = (-3^{-1} + 3^{-2} + 1) z = \frac{7}{9} z$ となって矛盾である。

一般論にもどって、もうひとつ $(n+1$ 変数$)$ l 次同次多項式 $g(z_1, z_2, \ldots, z_{n+1})$ が与えられたとする。

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{Zero}(f) \cap \mathrm{Zero}(g) \subset \mathbb{K}P^n \quad C^\infty \text{ 部分多様体} \\
\iff \quad & 1 \le \forall i \le n+1,\ \mathrm{Zero}(f) \cap \mathrm{Zero}(g) \cap U_i \subset U_i \quad C^\infty \text{ 部分多様体} \\
\Longleftarrow \quad & 1 \le \forall i \le n+1,\ (f_i, g_i) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^2 \text{ は } (0,0) \text{ を正則値をもつ.}
\end{aligned}
$$

最後の条件をみたす場合を、**完全交叉**（complete intersection）という。

例.

$$\{[x:y:u:v] \in \mathbb{C}P^3;\ x^3+y^3+u^3+v^3=0,\ x^2+y^2+u^2+v^2=0\} \subset \mathbb{C}P^3$$

は (実)2 次元 C^∞ 部分多様体である[13]。

証明. 変数 x, y, u, v について対称だから $\{v \neq 0\}$ で考えれば充分である。$\mathbb{C}^3$ において

$$
\begin{cases}
x^3+y^3+u^3+1=0 \\
x^2+y^2+u^2+1=0
\end{cases}
$$

を考えることになる。左辺の Jacobi 行列は $\begin{pmatrix} 3x^2 & 3y^2 & 3u^2 \\ 2x & 2y & 2u \end{pmatrix}$ であり、その階数が ≤ 1 というのは、すべての 2×2 小行列式が 0 ということ、つまり、$xy(x-y) = yu(y-u) = ux(u-x) = 0$ に同値である。そこで次の連立方程式

$$
\begin{cases}
x^3+y^3+u^3+1=0 \\
x^2+y^2+u^2+1=0 \\
xy(x-y)=0 \\
yu(y-u)=0 \\
ux(u-x)=0
\end{cases}
$$

に解がないことをしめせばよい。実際に解がないことは簡単に確かめられる[14]。 □

[13] 種数（genus）4 の閉 Riemann 面であることも知られている。

[14] まず、$xyu \neq 0$ と仮定する。このとき、連立方程式の後半から $x=y=u$ である。これを前半に代入して $3x^3 = 3x^2 = -1$ となる。そこで $1 = x^3/x^2 = x$ であるが、代入し直すと $3 = -1$ となって矛盾である。

そこで x, y, u のどれか一つは 0 でなければならない。対称性から $u = 0$ としてもよい。このとき $xy \neq 0$ と仮定すると、同じ計算で $x = y$ かつ $2x^3 = 2x^2 = -1$ ゆえに $x = 1$ そして $2 = -1$ となって矛盾である。

つまり u に加えて x, y のどちらかも 0 でなければならない。対称性から $y = 0$ としてもよい。このとき $x^3 = x^2 = -1$ ゆえに $x = 1$ そして $1 = -1$ となって矛盾である。

[Lie 群]

Lie 群（Lie group）

定義. G: Lie 群
$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 1) G: C^∞ 多様体
2) G: 群
3) 積 $G \times G \to G$, $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$, と逆 $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$, はともに C^∞ 写像である。

（注意）任意の群は離散位相をいれれば 0 次元 Lie 群とみなせる（補題 2.3 参照）。

補題 3.5. 2 つの Lie 群 G_1, G_2 の直積 $G_1 \times G_2$ も Lie 群である。

証明. 補題 2.8 と補題 2.9 による。 □

例. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする。

(1) $\mathbb{K}^n$ は加法について Lie 群である。実際、$\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $(u, v) \mapsto u + v$, および $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $u \mapsto -u$, はともに C^∞ 写像だからである。

(2) $GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K});\ \det A \neq 0\}(\overset{\text{open}}{\subset} M_n(\mathbb{K}))$ は行列の積について Lie 群である[15]。実際、行列の積は成分の 2 次多項式だから C^∞ であり、逆行列をとる写像は Cramer の公式により成分の有理式だから C^∞ である[16]。

部分群について

補題 3.6. H を Lie 群 G の部分群とし、$i : H \hookrightarrow G$, $x \mapsto x$, を包含写像とする。H には C^∞ 多様体の構造がはいっており[17]、条件

$$(\sharp) \qquad \forall L : C^\infty \text{ 多様体}, \forall f : L \to H : \text{写像 について} \quad (i \circ f : C^\infty \iff f : C^\infty)$$

をみたすとする。このとき H は Lie 群である。とくに、部分群 $H \subset G$ が C^∞ 部分多様体ならば、 H は Lie 群である。

証明. 積をとる写像を μ と表す。可換図式

$$\begin{tikzcd}
H \times H \arrow[r, "i \times i"] \arrow[dr, "\mu"'] & G \times G \arrow[r, "\mu"] & G \\
& H \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

において $i \circ \mu = \mu \circ (i \times i)$ は C^∞ だから、条件 ($\sharp$) により $\mu : H \times H \to H$ も C^∞ である。

逆をとる写像を S で表す。可換図式

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "S"'] & G \arrow[r, "S"] & G \\
& H \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

において $i \circ S = S \circ i$ は C^∞ だから、条件 ($\sharp$) により $S : H \to H$ も C^∞ である。 □

---

[15] $GL_n(\mathbb{K}) \overset{\text{open}}{\subset} M_n(\mathbb{K})$ は行列式 det の連続性による。
[16] このように、Cramer の公式は理論的には役に立つ。
[17] G の部分多様体とは限らない。

（注意）この講義の意味では部分多様体ではないが、条件 ($\sharp$) をみたす部分群の例として、無理数 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ のさだめる単射準同型 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, $t \mapsto (t, \alpha t) \bmod \mathbb{Z}^2$ がある。

例. $SL_n(\mathbb{K})$, $O(n)$, $U(n)$, $SU(n)$, $O(n;\mathbb{C})$, $Sp_{2g}(\mathbb{K})$, ... はすべて $GL_n(\mathbb{K})$ の部分群かつ C^∞ 部分多様体だから Lie 群である。

[Hamilton 四元数]

$S^3 (\cong SU(2))$ は Lie 群の構造をもつが、このことは Hamilton 四元数を用いてもわかる。

Hamilton 四元数（quarternion）$\mathbb{H}$（または $\mathbb{Q}$）と書き、

$$\mathbb{H} := \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix};\ z, w \in \mathbb{C} \right\} \cong \mathbb{R}^4$$

と定める。$\mathbb{H}$ は、明らかに、実数倍と和で閉じているが、

$$\begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z' & w' \\ -\overline{w'} & \overline{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} zz' - w\overline{w'} & zw' + w\overline{z'} \\ -\overline{w}z' - \overline{z}\overline{w'} & -\overline{w}w' + \overline{z}\overline{z'} \end{pmatrix}$$

により積でも閉じている[18]。

$\mathbb{H}$ の $\mathbb{R}$ 上の基底として

$$1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ i := \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix},\ j := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ k := \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

がとれる。これらは関係式

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k$$

をみたす。とくに非可換である。また、$q = \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$ の共役（conjugate）を

$$\overline{q} := \begin{pmatrix} \overline{z} & -w \\ \overline{w} & z \end{pmatrix}$$

と定める[19]。$q\overline{q} = \overline{q}q = (|z|^2 + |w|^2)1$ である。そこで $|q| := \sqrt{|z|^2 + |w|^2}$ と定める。これは Euclid ノルムに他ならない。$|q| \neq 0$ つまり $q \neq 0$ のとき、逆元 $q^{-1} = \dfrac{1}{|q|^2}\overline{q}$ がとれる。つまり $\mathbb{H}$ は歪体（skew field）である。また、$\mathbb{H}^\times := \mathbb{H} \setminus \{0\}$ は Lie 群となる。$\overline{qq'} = \overline{q'}\,\overline{q}$ および $|qq'| = |q||q'|$ がなりたつことに注意する。

$$S^3 = \{q \in \mathbb{H}^\times;\ |q| = 1\} = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix};\ z, w \in \mathbb{C},\ |z|^2 + |w|^2 = 1 \right\} = SU(2)$$

は $\mathbb{H}^\times$ の部分群かつ C^∞ 部分多様体である。このことからも S^3 が Lie 群の構造をもつことの説明ができる。同様に $S^1 = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\} = U(1) = SO(2)$ も Lie 群である。

---

[18]（無視してよい註）つまり $\mathbb{H}$ は $M_2(\mathbb{R})$ の実部分代数である。

[19] 各成分の複素共役をとって転置した。$\overline{1} = 1$, $\overline{i} = -i$, $\overline{j} = -j$, $\overline{k} = -k$ がなりたつ

[Lie 群準同型]

一般論にもどって、二つの Lie 群 H, G を考える。

定義. $\varphi : H \to G$: Lie 群準同型（Lie homomorphism）
$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 1) φ: C^∞ 写像
2) φ: 群準同型写像.

例. (1) 補題 3.6 の包含写像。
(2) 行列式 $\det : GL_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^\times$.

[群作用]

群作用（group action）
G を Lie 群とし、その単位元を $1 \in G$ とし、M を C^∞ 多様体とする。とくに直積 $G \times M$ も C^∞ 多様体である。

定義. $G \curvearrowright M$: C^∞ (左) 作用
$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 作用 $\mu : G \times M \to M$, $(g, x) \mapsto \mu(g, x)$, が C^∞ 写像である。

このとき、任意の $g \in G$ について $g : M \to M$, $x \mapsto g(x) = \mu(g, x)$, は C^∞ 微分同相写像である。実際 $gg^{-1} = g^{-1}g = 1_M : M \to M$ となるからである。各 $x \in M$ について

$$G_x := \{g \in G;\ gx = x\} \subset G$$

とおき[20]、x における G の**等方部分群**（isotropy subgroup, stabilizer）とよぶ。G_x は G の閉部分群[21]である。実際、M は Hausdorff 空間であって、G_x は連続写像 $G \to M \times M$, $g \mapsto (x, gx)$ による対角集合 Δ_M の逆像だからである。

定義. 作用 $G \curvearrowright M$ が**自由**（free）である。
$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x \in M, \quad G_x = \{1\}$.

C^∞ 作用の例. (1) 左からのかけ算 $G \times G \to G$, $(g, x) \mapsto gx$, は自由な C^∞ 作用である。
(2) 共役作用 $G \times G \to G$, $(g, x) \mapsto gxg^{-1}$, は C^∞ 作用である。$x \in G$ について G_x は $x \in G$ の中心化群に他ならない。とくに $G_x = G$ がなりたつことと $x \in \mathrm{Center}(G)$ とは同値である。
(3) 行列のベクトルへの作用 $GL_n(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $(A, v) \mapsto Av$, は C^∞ 作用である。
(4) 射影変換

$$\mu : GL_{n+1}(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}P^n \to \mathbb{K}P^n, \quad (A, [z]) \mapsto [Az],$$

は C^∞ 写像である。（したがって C^∞ 作用である。）実際、 $\mathbb{K}P^n = \{[z_1 : z_2 : \cdots : z_{n+1}]\}$ であり、局所座標

$$\varphi_i : U_i = \{z_i \neq 0\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^n, \quad [z_1 : z_2 : \cdots : z_{n+1}] \mapsto \left(\frac{z_1}{z_i}, \ldots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \ldots, \frac{z_{n+1}}{z_i}\right)$$

[20]部分群であることは容易にわかる。さらに C^∞ 部分多様体であることがわかるから、Lie 群である。
[21]閉部分集合かつ部分群。実は、Lie 群の閉部分群は C^∞ 部分多様体になる。たとえば [松島] IV, §18, 定理 3, p.217 を参照。

を思い出す。可換図式

$$\begin{tikzcd} GL_{n+1}(\mathbb{K}) \times U_i \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "1\times\varphi_i"'] & \mathbb{K}P^n \\ GL_{n+1}(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n \arrow[r] & \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[u, "\varpi"'] \end{tikzcd}$$

において下横の写像は $(A,(\zeta_1,\dots,\zeta_n)) \mapsto A^t(\zeta_1,\dots,\zeta_{i-1},1,\zeta_{i+1},\dots,\zeta_n)$ となって C^∞ であるから、上横の写像である作用 μ も C^∞ である。

(5) 上半平面[22]$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C};\ \Im z > 0\}$ について Möbius transformation $SL_2(\mathbb{R})\times\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ は C^∞ 作用である。実際、上横が Möbius transformation であり、下横が射影変換である可換図式

$$\begin{tikzcd} SL_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{H} \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathbb{H} \arrow[d, hook] \\ GL_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}P^1 \arrow[r] & \mathbb{C}P^1 \end{tikzcd}$$

において $SL_2(\mathbb{R})\times\mathbb{H}$ は $GL_2(\mathbb{C})\times\mathbb{C}P^1$ の C^∞ 部分多様体であり、$\mathbb{H}$ は $\mathbb{C}P^1$ の開部分多様体だからである。

次回の前半では、固有不連続作用を扱い、C^∞ 多様体の例を増やす。
後半からは C^∞ 多様体の接空間に入る。

[例題演習]

例題演習 第4回

$\mathbb{C}P^3$ の部分集合 $S = \{[z_1 : z_2 : z_3 : z_4] \in \mathbb{C}P^3;\ z_1z_4 - z_2z_3 = 0\}$ を考える。

(1) S が $\mathbb{C}P^3$ の C^∞ 部分多様体であることを示せ。

(2) S が $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ に C^∞ 微分同相であることを示せ。

[22] もちろん quarternion とは別物である。