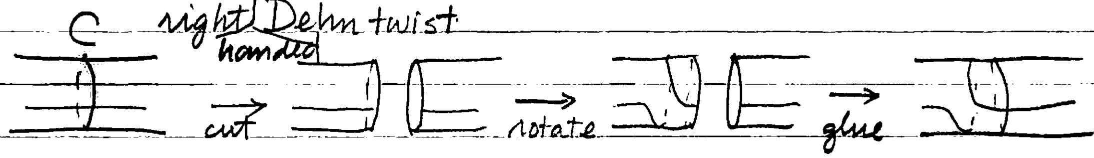
2013年5月15日(水) 15:50−16:50 117号室
数学講究XB
「曲線を曲線で微分する」
河澄響矢
久野雄介氏(津田塾大・学芸)との共同研究

S : compact connected oriented C^∞ 2-mfd with $\partial S \neq \phi$.
$*_0, *_1 \in \partial S$
$\Pi S(*_0, *_1) = [(I, 0, 1), (S, *_0, *_1)]$, $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$
the homotopy set of paths from $*_0$ to $*_1$ on S
$C \subset S \setminus \partial S$ simple closed curve
$t_C \in \mathrm{Aut}(\Pi S(*_0, *_1))$
right handed Dehn twist



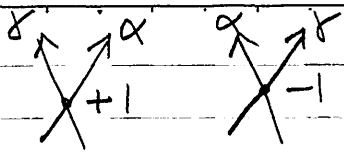
[この時間の内容
・t_C を函数 $\frac{1}{2}(\log x)^2$ を用いて表示する (Kuno−K.)
⟸「曲線の曲線による微分」
・"co" の有用性 "余作用" をつかう

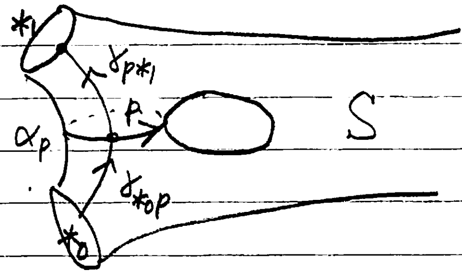
「free loop で paths を微分する」
$\hat{\pi} := [S^1, S]$ free loops on S, 基点を考えないhomotopy集合

$\alpha \in \hat{\pi}$, $\gamma \in \Pi S(*_0, *_1)$ 代表元を「一般の位置」にとる
つまり $\alpha \sqcup \gamma : S^1 \sqcup I \to S$ ははめこみであって
交叉は二重点のみで横断的であるようにとる.
⟹ とくに $\#(\alpha \cap \gamma) \neq \infty$

$$\sigma(\alpha)(\gamma) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{p \in \alpha \cap \gamma} \varepsilon(p ; \alpha, \gamma)\, \gamma_{*_0 p}\, \alpha_p\, \gamma_{p *_1} \in \mathbb{Z}\Pi S(*_0, *_1)$$

$\varepsilon(p ; \alpha, \gamma) \in \{\pm 1\}$ local intersection number

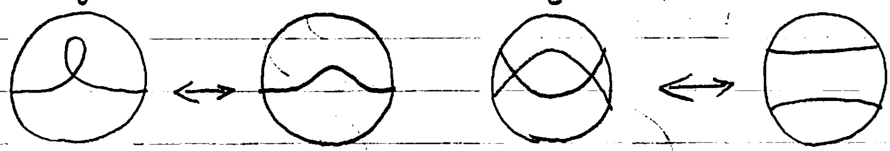




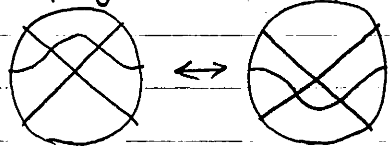
補題 $\sigma(\alpha)(\gamma)$ は代表元のとり方によらず well-defined である

証明のあらすじ homotopy による変形は次の3種類の moves で生成される

(I) monogon　　(II) bigon



(III) jumping over a double point

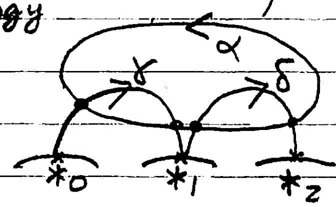


(I)〜(III) の moves で $\sigma(\alpha)(\gamma)$ の値が変わらないことを示す

(レポート問題)

(別証) S の twisted homology の交叉形式としてとらえる

"elementary string topology"



$\sigma(\alpha)$ は derivation (導分) になっている。

$*_2 \in \partial S$, $\delta \in \pi S(*_1, *_2)$

$$\sigma(\alpha)(\overrightarrow{\gamma\delta}) = \sigma(\alpha)(\gamma)\delta + \gamma\sigma(\alpha)(\delta) \in \mathbb{Z}\pi S(*_0, *_1)$$

Leibniz' rule をみたす。(一種の微分)

$1 \in \hat{\pi}$ constant loop　$\forall \gamma \in \pi S(*_0, *_1)$　$\sigma(1)(\gamma) = 0$

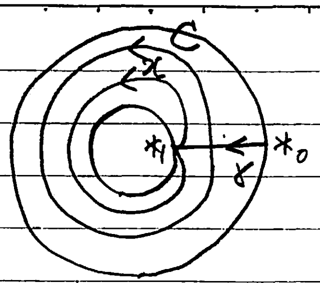
($\because$ γ と 1 の代表元は disjoint にとれる)

$$\sigma : \left(\mathbb{Z}\hat{\pi}/\mathbb{Z}1\right) \otimes \mathbb{Z}\pi S(*_0, *_1) \to \mathbb{Z}\pi S(*_0, *_1)$$

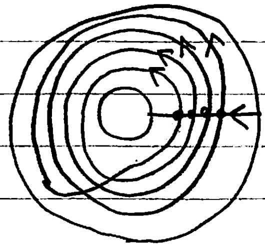
"action" とみることができる

例の計算 $C \subset S \setminus \partial S$ simple closed curve.

tubular nbd で考える



$\sigma(C^n)(\gamma) = n\gamma x^n$



$n \geq 0$
n個の交点、
各交点の寄与
$+\gamma x^n$

$f(x)$：xについての"函数"

$\sigma(f(C))(\gamma) = \gamma x f'(x)$ ← 比較

他方 $t_C(\gamma) = \gamma x = \gamma e^{\log x}$

$(\log t_C)(\gamma) = \gamma \log x$

$\boxed{x f'(x) = \log x}$ を解く

$f(x) = \int_1 \frac{1}{x} \log x \, dx = \frac{1}{2}(\log x)^2$

$\sigma(\frac{1}{2}(\log C)^2)(\gamma) = \gamma \log x = (\log t_C)(\gamma)$

$e^{\sigma(\frac{1}{2}\log C)^2}(\gamma) = \gamma e^{\log x} = \gamma x = t_C(\gamma)$

original $\Sigma_{g,1}$ general
定理 (Kuno-K.; Massuyeau-Turaev, Kuno-K.)

$t_C = e^{\sigma(\frac{1}{2}(\log C)^2)} \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{Q}\Pi S}(*_0, *_1))$ ← completion (log, expの正当化)

Riemann面の退化についてのPicard-Lefschetz公式の非可換化

一般化されたDehn twist (Kuno)

$C \subset S \setminus \partial S$, simpleではないclosed curveでも

$e^{\sigma(\frac{1}{2}(\log C)^2)}$は定義できる (generalized Dehn twist)

→ これはいつdiffeomorphismからくるか？

定理 (Kuno) C：8の字

$\pi_1(\text{regular nbd}(C)) \to \pi_1(S)$ injective

$\Longrightarrow$ $e^{\sigma(\frac{1}{2}(\log C)^2)}$はdiffeomorphismで表せない

証明は場合分けをたくさんやって沢山計算して矛盾を出す

"coaction" を使えばもっと簡単に強い結果がえられる

$\mu : \mathbb{Z}\Pi S(*_0, *_1) \longrightarrow \mathbb{Z}\Pi S(*_0, *_1) \otimes \left(\mathbb{Z}\hat{\pi}/\mathbb{Z}1\right)$ coaction

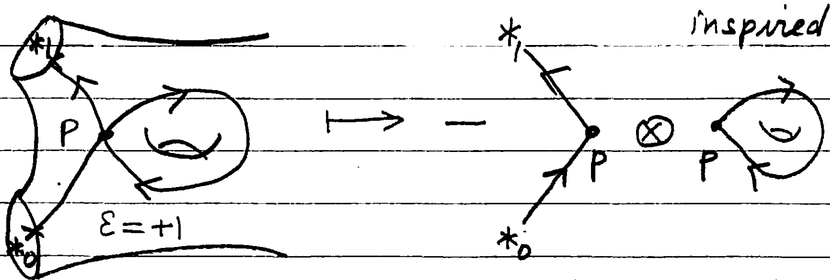
$\gamma \in \Pi S(*_0, *_1)$ in general position

$\Gamma_\gamma :=$ the set of double points of $\gamma \subset S$

$\ni p, \quad 0 \le t_1^p < t_2^p \le 1, \quad \gamma(t_1^p) = \gamma(t_2^p) = p$

$$\mu(\gamma) \overset{\mathrm{def}}{=} -\sum_{p \in \Gamma} \varepsilon(\dot{\gamma}(t_1^p), \dot{\gamma}(t_2^p))\, \gamma_{0 t_1^p} \gamma_{t_2^p 1} \otimes \gamma_{t_1^p t_2^p} \in \mathbb{Z}\Pi S(*_0, *_1) \otimes \left(\mathbb{Z}\hat{\pi}/\mathbb{Z}1\right)$$

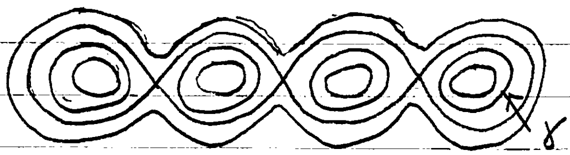
inspired by Turaev's μ



とくに γ : simple path $\Longrightarrow \mu(\gamma) = 0$

補題 μ : well-defined
(レポート問題)

$C \subset S \setminus \partial S$ closed curve



$N(C)$: regular neighborhood

γ : simple path

$\forall \varphi$: diffeomorphism

$\varphi(\gamma)$: simple

$\Longrightarrow \mu(\varphi(\gamma)) = 0$

他方

$e^{\sigma(\frac{1}{2}(\log C)^2)}(\gamma)$: 自己交叉がいっぱい

とくに $\mu(e^{\sigma(\frac{1}{2}(\log C)^2)})(\gamma) \neq 0$

あわせて

定理 (Kuno-K) $C \subset S \setminus \partial S$, non-simple closed curve

$\pi_1(N(C)) \longrightarrow \pi_1(S)$ injective

$\Longrightarrow e^{\sigma(\frac{1}{2}(\log C)^2)}$ は diffeomorphism で実現できない.