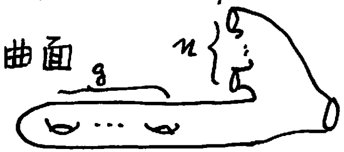
低次元トポロジーセミナー 2015年1月29日(木) 10:30-11:30, 大阪大学大学院理学研究科数学専攻 理学部B棟 342/346

「Turaev cobracket について」 河澄響矢 (東大・数理)

- S: 境界∂Sが空でない向きづけられた連結compact曲面

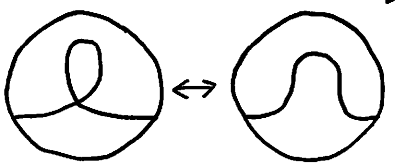
$\overset{\text{分類定理}}{\Longrightarrow}$ $\exists g, \exists n \geq 0$, $S = \Sigma_{g,n+1}$ =



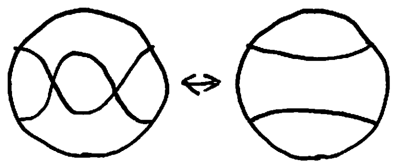
- $\hat{\pi} = \hat{\pi}(S) := [S^1, S]$, S上の自由loopの自由homotopy集合

$$= \frac{\{\alpha : S^1 \to S \text{ 正則はめこみ}\}}{\text{isotopy, moves (I)(II)(III)}}$$

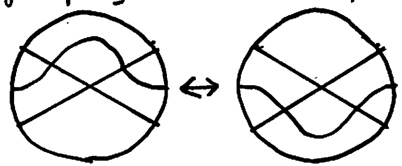
move (I)
birth-death of a monogon



move (II)
birth-death of a bigon



move (III)
jumping over a double point



- 概要 通常のTuraev余括弧積の最低次項には森田tracesがあらわれる(久野・河澄)
しかし(森田tracesを詳しくした)榎本・佐藤tracesはあらわれない(榎本). それはmove (I)があるためと思われる. そこでmove (I)をはずした正則homotopy版のTuraev余括弧積を考えることにした. この考え方は古田幹雄による写像類群のねじれ準同型の構成にinspireされている. パンツ曲面$\Sigma_{0,3}$の場合には, 柏原-Vergne問題との関連が見えてきた.

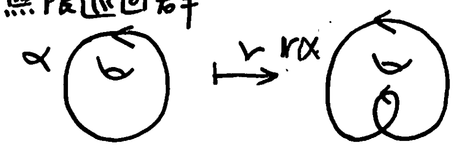
- $\hat{\pi}^+ = \hat{\pi}^+(S) := \pi_0 \,\mathrm{Immersion}(S^1, S) = \dfrac{\{\alpha : S^1 \to S : C^\infty\text{はめこみ}\}}{\text{正則 homotopy}} = \dfrac{\{\alpha : S^1 \to S : \text{正則はめこみ}\}}{\text{isotopy, moves (II)(III)}}$

  $\hat{\pi} = \hat{\pi}^+/\text{move (I)}$

  $\Phi : \hat{\pi}^+ \to \hat{\pi}$ 商写像 $=$ C^∞構造の忘却写像

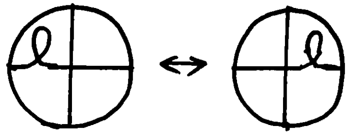
  $\langle r \rangle (\cong \mathbb{Z})$: 形式的な文字 r の生成する無限巡回群

  $\langle r \rangle \curvearrowright \hat{\pi}^+$ monogon の挿入による作用



  well-defined moves (II), (III) を用いると

  monogonの移動



  ができる $\Rightarrow$ 挿入の場所によらない。

  $\hat{\pi} = \hat{\pi}^+/\langle r \rangle, \quad \mathbb{Z}\hat{\pi} = \mathbb{Z}\hat{\pi}^+ \underset{\mathbb{Z}\langle r \rangle}{\otimes} \mathbb{Z}$

- f : a framing of TS $(\cong S \times \mathbb{R}^2)$ $(\because \partial S \neq \phi)$

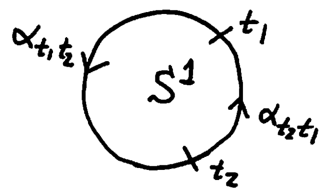
  $\Rightarrow \Phi_f : \hat{\pi}^+ \xrightarrow{\cong} \hat{\pi} \times \langle r \rangle, \quad \alpha \mapsto (\Phi\alpha, r^{\text{rotation\# of } \alpha \text{ w.r.to } f})$

  $\Rightarrow \Phi_f : \mathbb{Z}\hat{\pi}^+ \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}\hat{\pi} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Z}\langle r \rangle$ Goldman 括弧積を保つ同型

- $\mathbb{1} :=$  $\in \hat{\pi}^+$ trivial loop with rotation # 0 $\overset{\Phi}{\longmapsto} \mathbb{1} \in \hat{\pi}$: trivial loop

  $|\ | : \mathbb{Z}\pi_1(S) \to \mathbb{Z}\hat{\pi}$ 基点の忘却写像

  $|\ |' : \mathbb{Z}\pi_1(S) \xrightarrow{|\ |} \mathbb{Z}\hat{\pi} \xrightarrow{\text{商}} \mathbb{Z}\hat{\pi}/\mathbb{Z}\mathbb{1}$

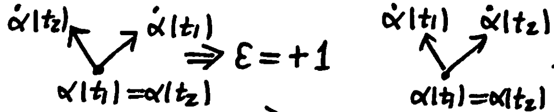


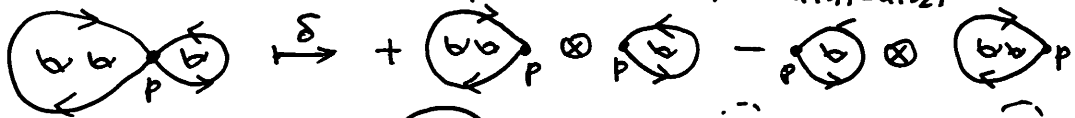
Turaev 余括弧積 $\delta : \mathbb{Z}\hat{\pi}/\mathbb{Z}\mathbb{1} \to (\mathbb{Z}\hat{\pi}/\mathbb{Z}\mathbb{1}) \otimes (\mathbb{Z}\hat{\pi}/\mathbb{Z}\mathbb{1})$

$\alpha \in \hat{\pi}$ in general position, $D_\alpha := \{(t_1, t_2) \in S^1 \times S^1 \,;\, t_1 \neq t_2, \alpha(t_1) = \alpha(t_2)\}$

$$\delta(\alpha) := \sum_{(t_1,t_2)\in D_\alpha} \varepsilon(\dot{\alpha}(t_1), \dot{\alpha}(t_2))\, |\alpha_{t_1t_2}|' \otimes |\alpha_{t_2t_1}|' \in (\mathbb{Z}\hat{\pi}/\mathbb{Z}\mathbb{1}) \otimes (\mathbb{Z}\hat{\pi}/\mathbb{Z}\mathbb{1})$$

$\varepsilon(\dot{\alpha}(t_1), \dot{\alpha}(t_2)) \in \{\pm 1\}$ 局所交叉数.



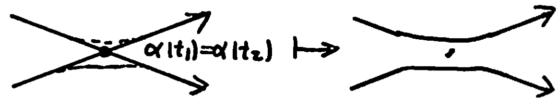


- 商 $\mathbb{Z}\hat{\pi}/\mathbb{Z}\mathbb{1}$ をとる理由：

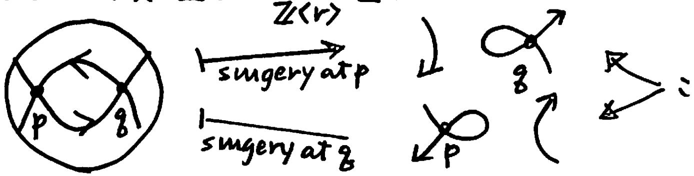
$\neq 0 \in \mathbb{Z}\hat{\pi} \otimes \mathbb{Z}\mathbb{1} + \mathbb{Z}\mathbb{1} \otimes \mathbb{Z}\hat{\pi}$

正則 homotopy 版の Turaev 余括弧積 $\delta^+ : \mathbb{Z}\hat{\pi}^+ \to \mathbb{Z}\hat{\pi}^+ \otimes_{\mathbb{Z}\langle r\rangle} \mathbb{Z}\hat{\pi}^+$

- これは $\alpha_{t_1t_2}$ と $\alpha_{t_2t_1}$ を $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)$ で smoothing して定義する



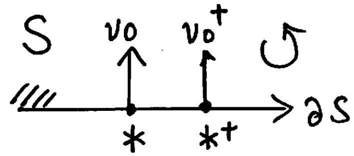
- 正則 homotopy だから move(I)：monogon の生滅に配慮して商 $\mathbb{Z}\hat{\pi}^+/\mathbb{Z}\mathbb{1}$ をとる必要はない
- tensor 積 $\mathbb{Z}\hat{\pi}^+ \otimes_{\mathbb{Z}\langle r\rangle} \mathbb{Z}\hat{\pi}^+$ のうえにてはじめて well-defined である.



これらは $\mathbb{Z}(\hat{\pi}^+ \times_{\langle r\rangle} \hat{\pi}^+) = \mathbb{Z}\hat{\pi}^+ \otimes_{\mathbb{Z}\langle r\rangle} \mathbb{Z}\hat{\pi}^+$ においてはじめて一致する

- $\forall \alpha \in \hat{\pi}^+$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\quad \delta^+(r^n\alpha) = r^n\delta^+\alpha + nr^n(\alpha \otimes \mathbb{1} - \mathbb{1} \otimes \alpha)$

  とくに δ^+ は $\mathbb{Z}\langle r\rangle$-線型ではない



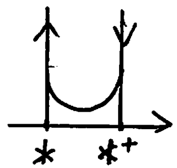
正則 homotopy 版の基本群 $\pi^+ = \pi^+(S)$

$v_0, v_0^+ \in TS$ を右図のようにとる.

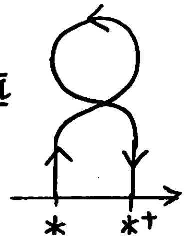
$$\pi^+ := \left\{ \ell : [0,1] \to S \;;\; \begin{array}{l} C^\infty \text{ はめこみ} \\ \dot\ell(0) = v_0,\ \dot\ell(1) = -v_0^+ \end{array} \right\} \Big/ \begin{array}{l} \text{端点を1次のorderまでとめる} \\ \text{正則 homotopy} \end{array}$$

・群構造

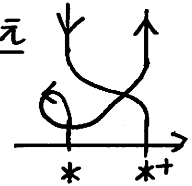
積



単位元

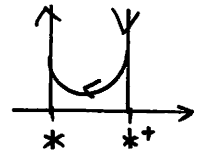


逆元



closing

$|\ | : \pi^+ \to \hat\pi^+$



・$\pi^+ = \pi_1(TS \setminus (0\text{-section}))$

$\hat\pi^+ \overset{\text{def}}{=} \pi^+/\text{conjugate}$, $\qquad \mathbb{Q}\hat\pi^+ = HH_0(\mathbb{Q}\pi^+)$

・f : a framing of S

forgetting smooth structure

$\Longrightarrow \quad \Phi_f : \pi^+ \xrightarrow{\cong} \pi \times \langle r \rangle,\ [\ell] \longmapsto (\Phi\ell,\ r^{(\mathrm{rot}_f \ell - \frac{1}{2})})$

$\Phi_f : \mathbb{Q}\pi^+ \xrightarrow{\cong} \mathbb{Q}\pi \otimes \mathbb{Q}\langle r \rangle \qquad$ isom. of Hopf algebras

Tensor 表示

$\pi := \pi_1(S,*)$, $* \in \partial S$, free group ($\because \partial S \neq \phi$)

$H := H_1(S;\mathbb{Q}) = (\pi/[\pi,\pi]) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, $\gamma \in \pi \mapsto [\gamma] := (\gamma \bmod [\pi,\pi]) \otimes_{\mathbb{Z}} 1 \in H$.

$\hat{T} = \hat{T}(H) := \prod_{m=0}^{\infty} H^{\otimes m}$, H 上の完備 tensor 代数. $\hat{T}_{\geq p} := \prod_{m \geq p} H^{\otimes m}$, $p \geq 1$, による位相が入っている.

$\Delta : \hat{T} \to \hat{T} \hat{\otimes} \hat{T}$, $X \in H \mapsto \Delta X = X \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} X$, 余積. $\rightsquigarrow$ $\hat{T}$; 完備 Hopf 代数

$\hat{\mathcal{L}} := \{u \in \hat{T} ; \Delta u = u \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} u\}$ H 上の完備自由 Lie 代数 (Lie-like element)

$\exp(\hat{\mathcal{L}}) = \{g \in \hat{T} \setminus \{0\} ; \Delta g = g \hat{\otimes} g\}$ (group-like element)

定義 $\theta : \pi \to \hat{T}$: group-like expansion of π

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ 1) $\forall \gamma \in \pi$, $\theta(\gamma) = 1 + [\gamma] +$ higher degree terms

2) $\forall \gamma, \forall \delta \in \pi$, $\theta(\gamma\delta) = \theta(\gamma)\theta(\delta)$

3) (group-like condition) $\theta(\pi) \subset \exp(\hat{\mathcal{L}})$

$\Longrightarrow$ $\theta : \widehat{\mathbb{Q}\pi} \overset{\cong}{\to} \hat{T}$ 完備 Hopf 代数の同型

(ただし, G : 群について $\widehat{\mathbb{Q}G} := \varprojlim_{m \to \infty} \mathbb{Q}G/(IG)^m$, $IG := \mathrm{Ker}(\varepsilon : \mathbb{Q}G \to \mathbb{Q}, \sum_{x \in G} a_x x \mapsto \sum a_x)$ 添加 ideal)

- f : a framing of S ($\Rightarrow$ $\Phi_f : \pi^+ \overset{\cong}{\to} \pi \times \langle r \rangle$ gp. isom)

$\Rightarrow$ $\Phi_f : \widehat{\mathbb{Q}\pi^+} \overset{\cong}{\to} \widehat{\mathbb{Q}\pi} \hat{\otimes} \mathbb{Q}[[\rho]]$ ただし. $\mathbb{Q}[[\rho]] = \widehat{\mathbb{Q}\langle r \rangle}$, $\rho = \log r$

$\Rightarrow$ $\theta_f := (\theta \hat{\otimes} 1_{\mathbb{Q}[[\rho]]}) \circ \Phi_f : \widehat{\mathbb{Q}\pi^+} \overset{\cong}{\to} \hat{T} \hat{\otimes} \mathbb{Q}[[\rho]]$ 完備 Hopf 代数の同型

- <u>cyclic symmetrizers</u> (cyclicizers)

  $N, N^+ : \hat{T} \to \hat{T}$, continuous $\mathbb{Q}$-linear maps

  <u>$m \geq 1$</u> $\quad N(X_1 \cdots X_m) = N^+(X_1 \cdots X_m) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{m} X_i \cdots X_m X_1 \cdots X_{i-1} \quad (X_j \in H)$

  <u>$m=0$</u> $\quad N|_{H^{\otimes 0}} := 0$ ($\leftrightarrow$ monogon をつぶす), $N^+|_{H^{\otimes 0}} := 1_{H^{\otimes 0}}$ ($\leftrightarrow$ monogon をつぶさない), $H^{\otimes 0} = \mathbb{Q} \subset \hat{T}$

  $$N^+(\hat{T}) = \mathbb{Q} \oplus N(\hat{T}) = HH_0(\hat{T})$$

- <u>完備化</u>

  $\widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}} := \varprojlim_{m\to\infty} \mathbb{Q}\hat{\pi} / \mathbb{Q}1 + |(I\pi)^m|$ 完備 Goldman-Turaev Lie双代数

  $\widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}^+} := \varprojlim_{m\to\infty} \mathbb{Q}\hat{\pi}^+ / |(I\pi^+)^m|$ 完備「正則」Goldman-Turaev Lie双代数

- <u>観察</u>(久野・河澄) θ: group-like expansion, f: framing of S

  $\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -N\theta : \widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}} \xrightarrow{\cong} N(\hat{T}),\quad |x| \in \hat{\pi} \mapsto -N\theta(x) \\ -N^+\theta_f : \widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}^+} \xrightarrow{\cong} N^+(\hat{T}) \hat{\otimes} \mathbb{Q}[[\rho]] \end{array} \right\}$ filtered $\mathbb{Q}$-vector空間の同型

  $$\delta^\theta := (-N\theta)^{\hat{\otimes} 2} \circ \delta \circ (-N\theta)^{-1} : N(\hat{T}) \to N(\hat{T}) \hat{\otimes} N(\hat{T})$$

  Turaev 余括弧積 の tensor 表示

  $$\delta^{+,\theta_f} := (-N^+\theta_f)^{\hat{\otimes} 2} \circ \delta^+ \circ (-N^+\theta_f)^{-1} : N^+(\hat{T}) \hat{\otimes} \mathbb{Q}[[\rho]] \to N^+(\hat{T}) \hat{\otimes} N^+(\hat{T}) \hat{\otimes} \mathbb{Q}[[\rho]]$$

  「正則」Turaev 余括弧積 の tensor 表示

δ^θ および δ^{+,θ_f} を具体的に計算したい … 未解決

- (Kuno-K., Massuyeau-Turaev) Goldman括弧積のtensor表示は「境界条件」("symplectic" "special") をみたす θ について完全に計算できており，θ のとり方によらない
- (Kuno-K., Massuyeau-Turaev) θ が「境界条件」をみたす場合の δ^θ の最低次項は計算されており，θ によらない：(Massuyeau-Turaev) さらに，それは quiver 理論の Schedler 余括弧積にひとしい．
- (Kuno). δ^θ の高次の項は，θ が「境界条件」をみたしていたとしても，θ のとり方に依存する
  ⟶ θ についての適切かつより詳しい条件 ("柏原-Vergne"??) が必要である
- (K.) 種数0の場合は $\theta = \theta^{std}$ (expによる，group-likeだがspecialではない) について完全に計算した
  これも柏原-Vergne 問題との関係を示唆しているように見える (最後にのべる)
- (K.). θ が「境界条件」をみたす場合の δ^{+,θ_f} の最低次項を
  (I) $S = \Sigma_{g,1}$ の場合と (II) $S = \Sigma_{0,n+1}$ の場合に計算した (これからのべる)
  (I)：榎本-佐藤 traces がふくまれている
  (II)：(Alekseev-Torossian の定式化による) 柏原-Vergne 問題の発散 cocycle がふくまれている
  これらのものの幾何的意味が明らかになった

(I) $\Sigma_{g,1} =$  $*$, $* \in \partial\Sigma_{g,1}$, $\pi = \pi_1(\Sigma_{g,1}, *)$, $(g \geq 1)$.

$H = H_1(\Sigma_{g,1} ; \mathbb{Q}) \xlongequal{\text{Poincaré duality}} H^* = H^1(\Sigma_{g,1} ; \mathbb{Q})$, $X \mapsto (Y \mapsto X \cdot Y)$, $\left(\begin{array}{l} \cdot : H \times H \to \mathbb{Q} \\ H = H_1(\Sigma_{g,1} ; \mathbb{Q}) \text{ 上の} \\ \text{交叉数} \end{array} \right)$

$\omega := \sum_{i=1}^{g} A_i B_i - B_i A_i \in H^{\otimes 2} \subset \hat{T}$ symplectic form

$\{A_i, B_i\}_{i=1}^{g} \subset H$: symplectic basis のとり方によらない.

$\mathrm{Der}_\omega(\hat{T}) := \{ D \in \mathrm{Der}(\hat{T}) \,;\, D\omega = 0 \}$ symplectic derivation

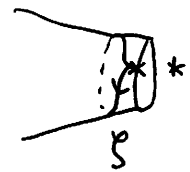
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Der}_\omega(\hat{T}) \arrow[r, "\iota_H", "\text{inj.}"'] \arrow[d, Rightarrow, "\cong"', "\text{同一視できる}"] & \mathrm{Hom}(H, \hat{T}) \arrow[r, phantom, "\overset{\text{P.d.}}{=}"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & H \otimes \hat{T} \arrow[d, phantom, "\parallel"] \\
N(\hat{T}) = \prod_{m=1}^{\infty} (H^{\otimes m})^{\mathbb{Z}/m} & \subset & \hat{T}_{\geq 1}
\end{tikzcd}$$

<u>定義</u> (Massuyean) $\theta : \pi \to \hat{T}$: symplectic expansion

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 1) $\theta : \pi \to \hat{T}$: group-like expansion

2) (symplectic condition) $\theta(\zeta) = \exp(\omega) \left(= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \omega^m \right) \in \hat{T}$

ただし. $\zeta \in \pi$: negative bomdary loop



<u>例</u> 1) (K.) harmonic Magnus expansion $/\mathbb{R}$

2) (Massuyean) Lê-Murakami-Ohtsuki functor

3) (Kuno) combinatorial constuction

定理 (Kuno-K.) θ: symplectic expansion

$$\Rightarrow -N\theta : \widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}}(\Sigma_{g,1}) \xrightarrow{\cong} N(\hat{T}) = \mathrm{Der}_\omega(\hat{T}) \quad \text{Lie algebra isomorphism}$$

$$|x| \in \hat{\pi} \longmapsto -N\theta(x)$$

同様に

$$\widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}}^+(\Sigma_{g,1}) \cong N^+(\hat{T}) \hat{\otimes} \mathbb{Q}[[\rho]] = (\mathbb{Q} \tilde{\times} \mathrm{Der}_\omega(\hat{T})) \hat{\otimes} \mathbb{Q}[[\rho]] \quad \text{Lie algebra isom.}$$

central extension

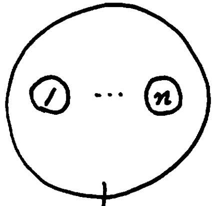
定理 (K.) θ: symplectic expansion, f: framing of $\Sigma_{g,1}$

$\Rightarrow \delta^{+,\theta_f}$ の最低次項は次数-2であり，次で与えられる ($X_i \in H$)

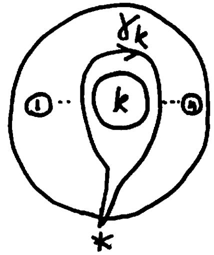
$$\delta^{+,\theta_f}_{(-2)} N^+(X_1 \cdots X_m)$$

$$= \sum_{1 \le i < j \le m} (X_i \cdot X_j) \left\{ N^+(X_{i+1} \cdots X_{j-1}) \hat{\otimes} N^+(X_{j+1} \cdots X_m X_1 \cdots X_{i-1}) - N^+(X_{j+1} \cdots X_m X_1 \cdots X_{i-1}) \hat{\otimes} N^+(X_{i+1} \cdots X_{j-1}) \right\}$$

とくに その $N^+(\hat{T}) \hat{\otimes} N^+(1)$ 成分は 榎本-佐藤 traces そのものである

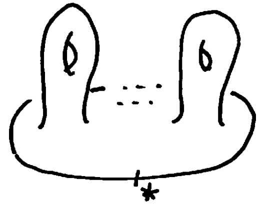
(II) $\Sigma_{0,n+1} =$  $\overset{\text{standard}}{\underset{\text{埋込}}{\hookrightarrow}} \mathbb{R}^2 \ (n \geq 1)$

$* \in \partial \Sigma_{0,n+1}$



$\gamma_k \in \pi_1(\Sigma_{0,n+1}, *)$

$1 \leq k \leq n$



$\Sigma_{n,1}$

$\pi = \pi_1(\Sigma_{0,n+1}, *) = \langle \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n \rangle$ free group of rank n

$x_k := [\gamma_k] \in H = H_1(\Sigma_{0,n+1}; \mathbb{Q})$, $1 \leq k \leq n$,

$\rightsquigarrow : \hat{T}_{\geq 1} \times \hat{T}_{\geq 1} \to \hat{T}_{\geq 1}$ 結合的乗法 ($\Sigma_{,1}$ 上の Massuyeau-Turaev の演算 $\rightsquigarrow$ のひきもどし)

$$x_{i_1} \cdots x_{i_{l-1}} x_{i_l} \rightsquigarrow x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_m} := -\delta_{i_l j_1} x_{i_1} \cdots x_{i_{l-1}} x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_m} \quad \begin{pmatrix} l, m \geq 1 \\ 1 \leq i_\alpha, j_\beta \leq n \end{pmatrix}$$

$x_0 := -\sum_{k=1}^{n} x_k$ が単位元であり、結合則をみたす

- <u>tangential / special derivations of</u> $\hat{T} = \hat{T}(H)$

$$t\text{-}\mathrm{Der}(\hat{T}) := \{ D \in \mathrm{Der}(\hat{T}) ; 1 \leq {}^\forall k \leq n, {}^\exists a_k \in \hat{T}, D(x_k) = [x_k, a_k] \}$$

tangential derivations

$a = (a_k)_{k=1}^{n} \in (\hat{T})^n, \mapsto D^a(x_k) := [x_k, a_k]$, $1 \leq {}^\forall k \leq n$, $D^a \in t\text{-}\mathrm{Der}(\hat{T})$

$b = (b_k)_{k=1}^{n} \in (\hat{T})^n$

$$[D^a, D^b](x_k) = [x_k, [a_k, b_k] + D^a(b_k) - D^b(a_k)]$$

$$[a, b] := \left([a_k, b_k] + D^a(b_k) - D^b(a_k) \right)_{k=1}^{n} \in (\hat{T})^n$$

$\Rightarrow ((\hat{T})^n, [\ ,\ ])$: Lie algebra $=: \widetilde{t\text{-}\mathrm{Der}}(\hat{T})$

$$0 \to \bigoplus_{k=1}^{n} \mathbb{Q}[[x_k]] \to \widetilde{t\text{-}\mathrm{Der}}(\hat{T}) \to t\text{-}\mathrm{Der}(\hat{T}) \to 0$$ central extension of Lie algebras

$$a \longmapsto D^a$$

$$\widetilde{t\text{-}\mathrm{Der}}(\hat{T}) = (\hat{T})^n \cong \hat{T} \otimes H = \hat{T}_{\geq 1} \qquad a = (a_k)_{k=1}^n \mapsto \sum_{k=1}^n a_k x_k$$ 同一視

$$\cup \qquad \circlearrowleft$$

$$\widetilde{s\text{-}\mathrm{Der}}(\hat{T}) := \{a \in \widetilde{t\text{-}\mathrm{Der}}(\hat{T}) : D^a(x_0) = 0\} \cong N(\hat{T})$$ 同一視 (Kuno)

special derivations

- $\forall a = \sum_{k=1}^n a_k x_k,\ \forall b = \sum_{k=1}^n b_k x_k \in N(\hat{T})$. $[a.b] = N(a \leadsto b - b \leadsto a) = \sum_{k=1}^n N([a_k, b_k] x_k)$

<u>定義</u> $\theta : \pi \to \hat{T}$ special expansion

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 1) $\theta : \pi \to \hat{T}$ group-like expansion

2) $1 \leq \forall k \leq n$. $\exists g_k \in \exp(\hat{\mathcal{L}})$ s.t. $\theta(\gamma_k) = g_k^{-1}(\exp x_k) g_k$

3) $\theta(\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_n) = \exp(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$

<u>例</u> 1) (Habegger-Masbaum) Kontsevich integral

2) (K.) harmonic Magnus expansion $/\mathbb{R}$

3) (Kuno) combinatorial construction

<u>定理</u> (Kuno-K., Massuyeau-Turaev) θ : special expansion.

$$\Rightarrow -N\theta : \mathbb{Q}\hat{\pi}(\Sigma_{0,n+1}) \xrightarrow{\cong} N(\hat{T}) = \widetilde{s\text{-}\mathrm{Der}}(\hat{T})$$ Lie algebra isomorphism

<u>定理</u> (K.) θ: special expansion, f: standard 埋込みによる $\Sigma_{0,n+1} \subset \mathbb{R}^2$ の framing

$\Rightarrow$ δ^{+,θ_f} の最低次項は次数 -1 であり、それの $p=0$ で値をとったものは次で与えられる ($X_i \in H$)

$$\delta^{+,\theta_f}_{(-1)}(N^+(X_1 \cdots X_m))\Big|_{p=0}$$
$$= \sum_{1\le i<j\le m} N^+(X_i \rightsquigarrow X_j X_{j+1} \cdots X_m X_1 \cdots X_{i-1}) \hat{\otimes} N^+(X_{i+1} \cdots X_{j-1}) + N^+(X_j \rightsquigarrow X_i X_{i+1} \cdots X_{j-1}) \hat{\otimes} N^+(X_{j+1} \cdots X_m X_1 \cdots X_{i-1})$$
$$- N^+(X_{i+1} \cdots X_{j-1}) \hat{\otimes} N^+(X_i \rightsquigarrow X_j X_{j+1} \cdots X_m X_1 \cdots X_{i-1}) - N^+(X_{j+1} \cdots X_m X_1 \cdots X_{i-1}) \hat{\otimes} N^+(X_j \rightsquigarrow X_i X_{i+1} \cdots X_{j-1})$$

とくにその $N^+(\hat{T}) \hat{\otimes} N^+(1)$ 成分は柏原 Vergne 問題の発散 cocycle の (-1) 倍にひとしい。

<u>発散 cocycle</u> ([AT] Alekseev-Torossian)

$tr_n := \hat{T}_{\geq 1} / \overline{[\hat{T}, \hat{T}]}$ $(\cong N(\hat{T}) \cong \mathbb{Q}\hat{\pi}(\Sigma_{0,n+1}))$

$tr: \hat{T}_{\geq 1} \to tr_n$, quotient map

$\mathrm{div}: t\text{-}\widetilde{\mathrm{Der}}(\hat{T}) \to tr_n$, $a = \sum_{k=1}^n a_k x_k \longmapsto \mathrm{div}(a) := -tr(\sum_{k=1}^n a_k \rightsquigarrow x_k)$

divergent cocycle

<u>cocycle</u>. $\forall a, \forall b \in t\text{-}\widetilde{\mathrm{Der}}(\hat{T})$ $\quad \mathrm{div}([a,b]) = D^a \mathrm{div}(b) - D^b \mathrm{div}(a)$

<u>tangential / special derivations of</u> $\hat{\mathcal{L}}$

$tder_n := \{ D \in \mathrm{Der}(\hat{\mathcal{L}}) ;\ 1 \leq \forall k \leq n,\ \exists a_k \in \hat{\mathcal{L}},\ D(x_k) = [x_k, a_k] \}$ tangential derivation

$\underset{\text{同一視}}{=} \{ D \in t\text{-}\widetilde{\mathrm{Der}}(\hat{T}) ;\ \Delta \circ D = (D \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} D) \circ \Delta \}$

$(\because)\ \ \mathrm{ad}(x_k)^{-1}(\hat{\mathcal{L}}) = \mathbb{Q}[[x_k]] + \hat{\mathcal{L}} \subset \hat{T})$

$$\widetilde{\mathrm{tder}}_n := \{ a \in \hat{\mathcal{L}} \otimes H \subset \widetilde{t\text{-}\mathrm{Der}}(\hat{T}) \,;\, \Delta \circ D^a = (D^a \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} D^a) \circ \Delta \}$$

$$0 \to \bigoplus_{k=1}^{n} \mathbb{Q} x_k^2 \to \widetilde{\mathrm{tder}}_n \to \mathrm{tder}_n \to 0$$

$$a \longmapsto D^a .$$

central extension
split ([AT])

$\varpi_1 : \mathfrak{tr}_n \to H$. 次数1成分への射影

$$\begin{tikzcd}
 & & H \arrow[rr, phantom] & & \\
0 \arrow[r] & \bigoplus_{k=1}^{n} \mathbb{Q} x_k^2 \arrow[r] \arrow[ur, "\cong"] \arrow[ur, bend left, phantom, ""] & \widetilde{\mathrm{tder}}_n \arrow[r] \arrow[u, "\varpi_1 \circ \mathrm{div}"'] \arrow[d, "\mathrm{div}"'] \arrow[ul, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{tder}_n \arrow[r] \arrow[l, bend right, "\text{splitting}"'] \arrow[dl, dashed] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] & 0 \\
 & & \mathfrak{tr}_n & &
\end{tikzcd}$$

div と定義する [AT]

$$\widetilde{\mathrm{sder}}_n := \widetilde{\mathrm{tder}}_n \cap \widetilde{s\text{-}\mathrm{Der}}(\hat{T}) \subset \widetilde{s\text{-}\mathrm{Der}}(\hat{T}) \cong \widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}}(\Sigma_{0,n+1})$$

$$0 \to \bigoplus_{k=1}^{n} \mathbb{Q} x_k^2 \to \widetilde{\mathrm{sder}}_n \to \mathrm{sder}_n \to 0$$ split central extension

$$\tfrac{1}{2} x_k^2 \longmapsto \log(\text{right-handed Dehn twist along } \partial_k \Sigma_{0,n+1})$$

<u>tangential automorphisms of</u> $\hat{\mathcal{L}}$ (after [AT])

$$\mathrm{TAut}_n := \{ U \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathcal{L}}) \,;\, \Delta \circ U = (U \hat{\otimes} U) \circ \Delta,\ 1 \le {}^{\forall} k \le n,\ {}^{\exists} g_k \in \exp(\hat{\mathcal{L}})\ \ U x_k = g_k^{-1} x_k g_k \}$$

tangential automorphisms

$$\mathrm{TAut}_n \underset{\exp}{\overset{\log}{\rightleftarrows}} \mathrm{tder}_n \quad (\cong)$$

$\widehat{\mathfrak{tr}}_n := \mathfrak{tr}_n \oplus \mathbb{Q}c$ extension of $\mathfrak{tr}_n$ by div. $Dc := \mathrm{div}(D) \in \mathfrak{tr}_n \subset \widehat{\mathfrak{tr}}_n$ $(D \in \mathfrak{tder}_n)$

<u>Jacobian cocycle</u> $j : \mathrm{TAut}_n \longrightarrow \mathfrak{tr}_n$, $j(F) := Fc - c \in \mathfrak{tr}_n$ $(F \in \mathrm{Aut}_n)$

$\forall D \in \mathfrak{tder}_n \quad j(e^D) = \dfrac{e^D - 1}{D} \cdot \mathrm{div}(D)$

<u>$n=2$</u> $\mathfrak{tr}_1 = x_1 \mathbb{Q}[[x_1]] \ni f$

$\tilde{\delta} : \mathfrak{tr}_1 \to \mathfrak{tr}_2$, $(\tilde{\delta} f)(x_1, x_2) = \mathrm{tr}\left(f(x_1) + f(x_2) - f(x_1 H x_2)\right)$

(where $H : \hat{\mathcal{L}} \times \hat{\mathcal{L}} \longrightarrow \hat{\mathcal{L}}$ Baker-Campbell-Hausdorff series, $u H v := \log(e^u e^v)$)

<u>柏原-Vergne 問題</u> ([AT]の定式化)

次の(i)(ii)をみたす $F \in \mathrm{TAut}_2$ を見出せ

(i) $F(x_1 + x_2) = x_1 H x_2$

(ii) $j(F) = \tilde{\delta}\left(\dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{B_{2k} x^{2k}}{2k \cdot (2k)!}\right)$. B_{2k} : Bernoulli number

<u>定理</u> (Alekseev-Meinrenken)

柏原-Vergne 問題は解をもつ —

$\theta^{std} : \pi \to \hat{T}$, $\gamma_k \mapsto e^{x_k}$ $(1 \le \forall k \le n)$ standard exponential expansion

(i) $\Longleftrightarrow$ $F^{-1} \circ \theta^{std}$: special expansion --- "柏原-Vergne expansion"

(ii)の Bernoulli 数はどこから来るのか? { <u>柏原-Vergne</u> Duflo 同型 ようするに Todd 類

<u>topological meaning</u>? $\delta^{std} := \delta^{\theta^{std}}$

<u>定理</u>(K.) $\forall n \geq 1$, $\forall k_1, \forall k_2, \cdots, \forall k_m \in \{1, 2, \cdots, n\}$, $m \geq 1$

$$
\begin{aligned}
&\delta^{std}(N(x_{k_1} x_{k_2} \cdots x_{k_m})) \\
&= \mathrm{alt}(N \hat{\otimes} N)\Big[\sum_{1 \leq i < j \leq m} \Big((1 \hat{\otimes} \iota)\Delta\Big(\varepsilon_{k_i k_j} x_{k_i} x_{k_j} - \delta_{k_i k_j} \frac{x_{k_i}^2}{e^{-x_{k_i}} - 1}\Big)\Big)(x_{k_{j+1}} \cdots x_{k_m} x_{k_1} \cdots x_{k_{i-1}} \hat{\otimes} x_{k_{i+1}} \cdots x_{k_{j-1}}) \\
&\qquad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} x_{k_{i+1}} \cdots x_{k_m} x_{k_1} \cdots x_{k_{i-1}} \hat{\otimes} x_{k_i} \\
&\qquad - \sum_{i=1}^{m} \sum_{g=1}^{\infty} \frac{B_{2g}}{(2g)!} \sum_{p=0}^{2g} (-1)^p \binom{2g}{p} x_{k_1} \cdots x_{k_{i-1}} x_{k_i}^{p} x_{k_{i+1}} \cdots x_{k_m} \hat{\otimes} x_{k_i}^{2g-p}\Big]
\end{aligned}
$$

where $\mathrm{alt} : N(\hat{T}) \hat{\otimes} N(\hat{T}) \longrightarrow N(\hat{T}) \hat{\otimes} N(\hat{T})$, $u \hat{\otimes} v \longmapsto u \hat{\otimes} v - v \hat{\otimes} u$

$\iota : \hat{T} \to \hat{T}$, $X \in H \mapsto -X \in H$, antipode

$$
\varepsilon_{kl} := \begin{cases} 1 & \text{if } k > l \\ 0 & \text{if } k \leq l \end{cases}
$$

<u>問い</u> (1) $\delta^\theta = \delta^\theta_{(-2)}$ (Schedler's cobracket) となる θ は存在するか?

(2) $\Sigma_{0,3}$ について θ: 柏原-Vergne expansion ならば $\delta^\theta \underset{?}{=} \delta^\theta_{(-1)}$ か?

(2) が、もし Yes ならば (1) は「正種数柏原 Vergne 問題」ということになる

もし No ならば Johnson 準同型像の constraint がえられ、さらに

Grothendieck-Teichmüller Lie 代数に新しい filtration が入る