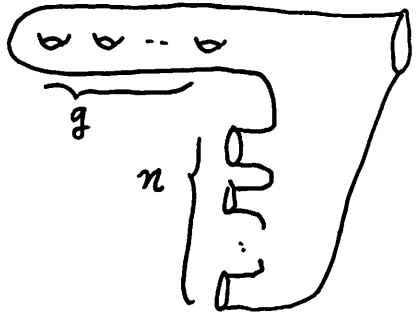
「Turaev余括弧積，榎本－佐藤traces そして 柏原Vergne問題における発散cocycle」

日本数学会トポロジー分科会一般講演　於.広島大学　2014年9月26日
河澄 響矢 (東大・数理)

• S : 境界∂Sが空でない向きづけられた連結compact C^∞曲面

$\underset{\text{分類定理}}{\Longrightarrow}$ $\exists g,\ \exists n \geq 0.\quad S = \Sigma_{g,n+1} =$



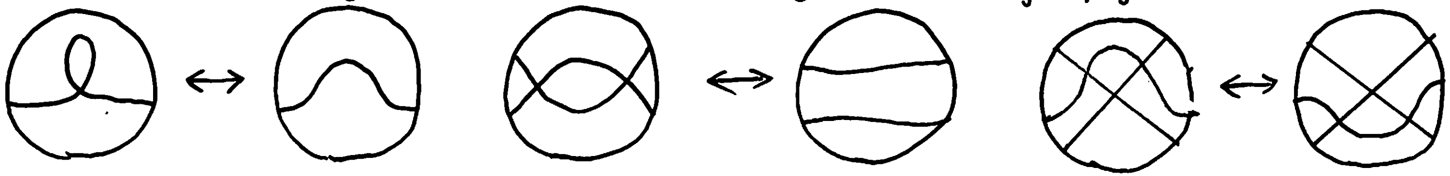
• $\hat{\pi} = \hat{\pi}(S) := [S^1, S]$　S上の自由loopの自由homotopy集合

$$= \frac{\{\alpha : S^1 \to S : \text{正則はめこみ}\}}{\text{isotopy, moves (I),(II),(III)}}$$

move (I)　birth-death of a monogon

move (II)　birth-death of a bigon

move (III)　jumping over a double point



背景　通常のTuraev余括弧積の最低次項には森田tracesがあらわれる(久野-河澄). しかし, (森田tracesを詳しくした)榎本-佐藤tracesはあらわれない(榎本). それはmove (I)があるためと思われる. そこでmove (I)をはずして正則homotopy版のTuraev余括弧積を考えることにした.
古田幹雄による写像類群のねじれ準同型の構成にinspireされている.

- $\hat{\pi}^+ = \hat{\pi}^+(S) := \pi_0 \,\mathrm{Immersion}(S^1, S) = \dfrac{\{\alpha : S^1 \to S : C^\infty はめこみ\}}{正則\ \text{homotopy}}$

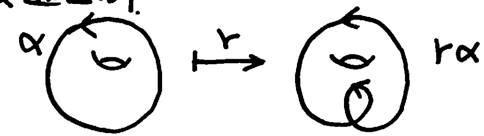
  $= \dfrac{\{\alpha : S^1 \to S\ 正則はめこみ\}}{\text{isotopy, moves (II), (III)}}$

  $\hat{\pi} = \hat{\pi}^+/\text{move (I)}$

  $\Phi : \hat{\pi}^+ \to \hat{\pi}$ 商写像 = forgetful map of smooth structures

  $\langle r \rangle\ (\cong \mathbb{Z})$: 形式的な文字 r の生成する無限巡回群

  $\langle r \rangle \curvearrowright \underset{\alpha}{\overset{\psi}{\hat{\pi}^+}}$ monogon の挿入による作用

  $\hat{\pi} = \hat{\pi}^+/\langle r \rangle$, $\quad \mathbb{Z}\hat{\pi} = \mathbb{Z}\hat{\pi}^+ \otimes_{\mathbb{Z}\langle r \rangle} \mathbb{Z}$

- f : a framing of $TS\ (\cong S \times \mathbb{R}^2)$ $(\because \partial S \neq \phi)$

  $\Rightarrow \Phi_f : \hat{\pi}^+ \xrightarrow{\cong} \hat{\pi} \times \langle r \rangle$, $\alpha \mapsto (\Phi\alpha, r^{\text{rotation \# of } \alpha \text{ w.r.to } f})$

  $\Rightarrow \Phi_f : \mathbb{Z}\hat{\pi}^+ \cong \mathbb{Z}\hat{\pi} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}\langle r \rangle$ Goldman 括弧積を保つ同型

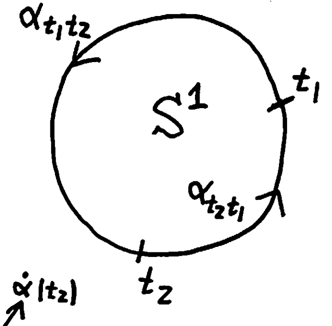
- $1 :=$  $\in \hat{\pi}^+$ trivial loop with rotation number 0

  $\downarrow$

  $1 \in \hat{\pi}$ trivial loop

  $|\ | : \mathbb{Z}\pi_1(S) \to \mathbb{Z}\hat{\pi}$ forgetful map of the base point

  $|\ |' : \mathbb{Z}\pi_1(S) \xrightarrow{|\ |} \mathbb{Z}\hat{\pi} \xrightarrow{\text{quotient}} \mathbb{Z}\hat{\pi}/\mathbb{Z}1$

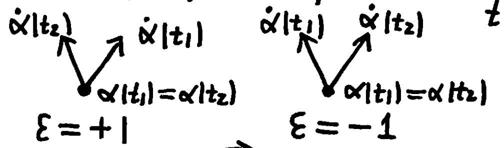


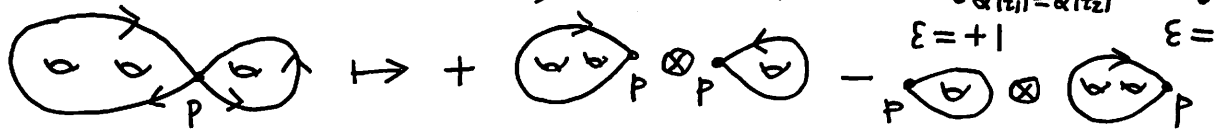
Turaev 余括弧積 $\delta:\ \mathbb{Z}\hat{\pi}/\mathbb{Z}\mathbb{1} \to (\mathbb{Z}\hat{\pi}/\mathbb{Z}\mathbb{1}) \otimes (\mathbb{Z}\hat{\pi}/\mathbb{Z}\mathbb{1})$

$\alpha \in \hat{\pi}$ in general position, $D_\alpha := \{(t_1,t_2) \in S^1 \times S^1;\ t_1 \neq t_2,\ \alpha(t_1) = \alpha(t_2)\}$

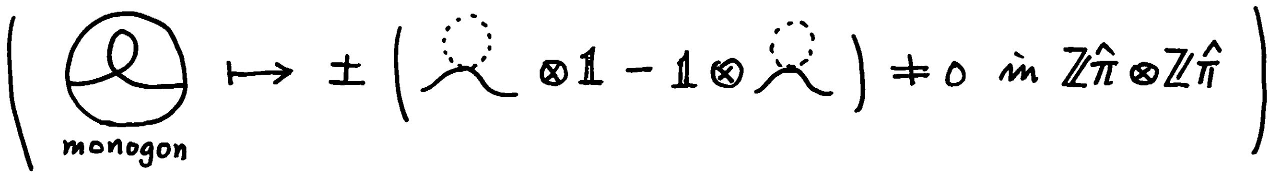
$$\delta(\alpha) := \sum_{(t_1,t_2)\in D_\alpha} \varepsilon(\dot{\alpha}(t_1), \dot{\alpha}(t_2))\, |\alpha_{t_1t_2}|' \otimes |\alpha_{t_2t_1}|' \in (\mathbb{Z}\hat{\pi}/\mathbb{Z}\mathbb{1}) \otimes (\mathbb{Z}\hat{\pi}/\mathbb{Z}\mathbb{1})$$

$\varepsilon(\dot{\alpha}(t_1), \dot{\alpha}(t_2)) \in \{\pm 1\}$ 局所交叉数



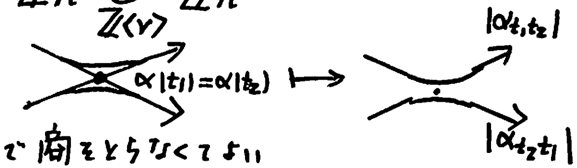


商 $\mathbb{Z}\hat{\pi}/\mathbb{Z}\mathbb{1}$ をとる理由

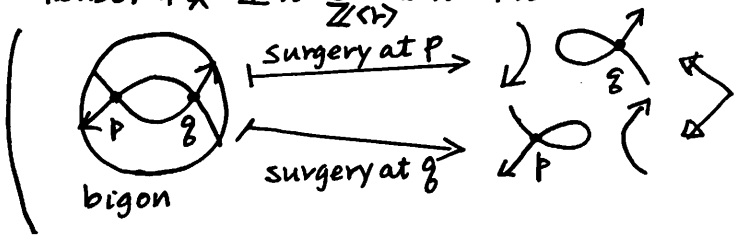


正則 homotopy 版の Turaev 余括弧積 $\delta^+:\ \mathbb{Z}\hat{\pi}^+ \to \mathbb{Z}\hat{\pi}^+ \otimes_{\mathbb{Z}\langle r\rangle} \mathbb{Z}\hat{\pi}^+$

は，$\alpha_{t_1t_2}$ と $\alpha_{t_2t_1}$ を $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)$ で smoothing して定義する



- 正則 homotopy だから monogon に配慮する必要はない．したがって $\mathbb{Z}\mathbb{1}$ で商をとらなくてよい
- tensor 積 $\mathbb{Z}\hat{\pi}^+ \otimes_{\mathbb{Z}\langle r\rangle} \mathbb{Z}\hat{\pi}^+$ の元としてはじめて well-defined である



これらは $\mathbb{Z}(\hat{\pi}^+ \times_{\langle r\rangle} \hat{\pi}^+) = \mathbb{Z}\hat{\pi}^+ \otimes_{\mathbb{Z}\langle r\rangle} \mathbb{Z}\hat{\pi}^+$ においてはじめて一致する

- δ^+ は $\mathbb{Z}\langle r\rangle$-線型ではない．

Tensor 表示

$\pi := \pi_1(S, *)$, $* \in \partial S$, free group $(\because \partial S \neq \phi)$

$H := H_1(S;\mathbb{Q}) = (\pi/[\pi,\pi]) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, $\gamma \in \pi \mapsto [\gamma] := (\gamma \bmod [\pi,\pi]) \otimes_{\mathbb{Z}} 1 \in H$

$\hat{T} = \hat{T}(H) := \prod_{m=0}^{\infty} H^{\otimes m}$ the completed tensor algebra over H

$\Delta : \hat{T} \to \hat{T} \hat{\otimes} \hat{T}$, $X \in H \mapsto \Delta(X) = X \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} X$, 余積 $\rightsquigarrow$ $\hat{T}$: 完備 Hopf 代数

定義 $\theta : \pi \to \hat{T}$ group-like expansion of π

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
1) $\forall \gamma \in \pi$, $\theta(\gamma) = 1 + [\gamma] +$ higher degree terms
2) $\forall \gamma, \forall \delta \in \pi$, $\theta(\gamma\delta) = \theta(\gamma)\theta(\delta)$
3) (group-like condition) $\forall \gamma \in \pi$, $\Delta\theta(\gamma) = \theta(\gamma) \hat{\otimes} \theta(\gamma)$ (i.e., $\theta(\gamma) \in \hat{T}$: group-like element)

$\Rightarrow$ $\theta : \widehat{\mathbb{Q}\pi} \xrightarrow{\cong} \hat{T}$ 完備 Hopf 代数の同型

ただし. $\widehat{\mathbb{Q}\pi} := \varprojlim_{m \to \infty} \mathbb{Q}\pi / (I\pi)^m$, $I\pi := \mathrm{Ker}(\varepsilon : \mathbb{Q}\pi \to \mathbb{Q}, \sum_{x \in \pi} a_x x \mapsto \sum a_x)$ 添加 ideal.

<u>cyclic symmetrizer</u> (cyclicizer) $N^+ : \hat{T} \to \hat{T}$

$(m \geq 1)$ $N^+(X_1 X_2 \cdots X_m) := \sum_{i=1}^{m} X_i \cdots X_m X_1 \cdots X_{i-1}$, $X_j \in H$

$(m = 0)$ $N^+|_{H^{\otimes 0}} := 1_{H^{\otimes 0}}$ (これは monogon をつぶさないことに対応している)

$\widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}^+} := \varprojlim_{m\to\infty} \mathbb{Q}\hat{\pi}^+ / |(I\pi^+)^m|$ 「正則」Goldman-Turaev Lie双代数の完備化

ただし、π^+ : Sの「正則」基本群、（f : framing of $S \Rightarrow \pi^+ \cong \pi \times \langle r \rangle$ 群同型）$\underset{f}{\cong} \pi_1(S)\times\mathbb{Z}$

$\pi^+ \cong \pi_1(TS \setminus (0\text{-section}))$

θ : group-like expansion of $\pi = \pi_1(S, *)$, f : a framing of S

$\Rightarrow \quad -N^+ \circ \theta_f : \widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}^+} \xrightarrow{\cong} N^+(\hat{T}) \hat{\otimes} \mathbb{Q}[[\rho]]$. filtered $\mathbb{Q}$-vector 空間の同型

ただし、$\rho := \log r \in \widehat{\mathbb{Q}\langle r \rangle} = \mathbb{Q}[[\rho]]$

$\delta^{+,\theta_f} := (-N^+ \circ \theta_f)^{\hat{\otimes} 2} \circ \delta^+ \circ (-N^+ \circ \theta_f)^{-1} : N^+(\hat{T}) \hat{\otimes} \mathbb{Q}[[\rho]] \longrightarrow (N^+(\hat{T}) \hat{\otimes} \mathbb{Q}[[\rho]])^{\hat{\otimes} 2}$

「正則」Turaev 余括弧積の tensor 表示.

◉ δ^{+,θ_f}（およびδ^θ）を具体的に計算したい. ‥‥ 未解決 ‥‥ ただし θを非常にうまくとる必要がある

「うまい条件」はわかっている（"symplectic" "special"）（（久野・河澄, Massuyeau-Turaev））が、その条件の下でもθのとり方に依存する（久野）

「非常にうまい条件」はわかっていない（"柏原-Vergne"と呼ばれるべきかもしれない）

本一般講演 「うまい条件」の下でのδ^{+,θ_f}の最低次項を $^{(\mathrm{I})}\Sigma_{g,1}$ と $^{(\mathrm{II})}\Sigma_{0,n+1}$ の場合に計算した：

(I) ‥ 榎本-佐藤 traces がふくまれている.

(II) ‥ 柏原-Vergne問題の｛発散 cocycle がふくまれている（（Alekseev-Torossian の定式化による））

これらのものの幾何的意味が明らかになったことになる.

(I) $\Sigma_{g,1} =$  , $* \in \partial\Sigma_{g,1}$, $\pi = \pi_1(\Sigma_{g,1}, *)$, $(g \geq 1)$

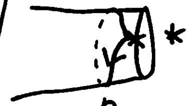
定義 (Massuyeau)

$\theta : \pi \to \hat{T}$: symplectic expansion

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 1) $\theta : \pi \to \hat{T}$: group-like expansion

2) (symplectic condition) $\theta(\zeta) = \exp(\omega) \in \hat{T}$

ただし,



$\zeta \in \pi$

ζ : negative boundary loop

$\omega := \sum_{i=1}^{g} A_i B_i - B_i A_i \in H^{\otimes 2} \subset \hat{T}$

symplectic form

(symplectic 基底 $\{A_i ; B_i\}_{i=1}^{g} \subset H = H_1(\Sigma_{g,1};\mathbb{Q})$ のとり方によらない)

定理 (K.) θ : symplectic expansion, f : framing of $\Sigma_{g,1}$

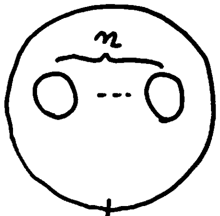
$\Rightarrow$ δ^{+,θ_f} の最低次項は次数 -2 であり次で与えられる $(X_i \in H)$

$$\delta^{+,\theta_f}_{(-2)} N^+(X_1 \cdots X_m)$$

$$= \sum_{1 \leq i < j \leq m} (X_i \cdot X_j) \left\{ N^+(X_{i+1} \cdots X_{j-1}) \hat{\otimes} N^+(X_{j+1} \cdots X_m X_1 \cdots X_{i-1}) - N^+(X_{j+1} \cdots X_m X_1 \cdots X_{i-1}) \hat{\otimes} N^+(X_{i+1} \cdots X_{j-1}) \right\}$$

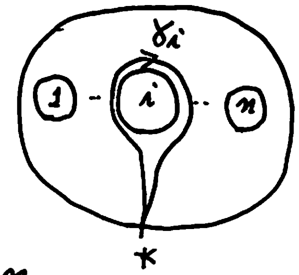
(ただし $\cdot : H \otimes H \to \mathbb{Q}$ は $H = H_1(\Sigma_{g,1};\mathbb{Q})$ 上の交叉数である)

とくに, その $N^+(\hat{T}) \otimes N^+(1)$-成分は 榎本-佐藤 traces にひとしい

(II) $\Sigma_{0,n+1} =$ 

$* \in \partial\Sigma_{0,n+1}$

$\hookrightarrow \mathbb{R}^2$ standard うめこみ



$(n \geq 2)$

$\pi = \pi_1(\Sigma_{0,n+1}, *) = \langle \gamma_1, \cdots, \gamma_n \rangle$ free group of rank n

$x_i := [\gamma_i] \in H = H_1(\Sigma_{0,n+1}; \mathbb{Q})$

定義

$\theta : \pi \to \hat{T}$ special expansion

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 1) $\theta : \pi \to \hat{T}$ group-like expansion

2) $1 \leq {}^\forall i \leq n$, ${}^\exists g_i \in \hat{T}$ s.t. $\Delta g_i = g_i \hat{\otimes} g_i$, $\theta(\gamma_i) = g_i \exp(x_i) g_i^{-1}$

3) $\theta(\gamma_1 \cdots \gamma_n) = \exp(x_1 + \cdots + x_n)$

◎ $\dot{\rightsquigarrow} : \hat{T}_{\geq 1} \times \hat{T}_{\geq 1} \to \hat{T}_{\geq 1}$ 結合的乗法 (Massuyeau-Turaev による $\Sigma_{g,1}$ 上の $\dot{\rightsquigarrow}$ のひきもどし)

$x_{i_1} \cdots x_{i_l} \dot{\rightsquigarrow} x_{j_1} \cdots x_{j_m} := -\delta_{i_l j_1} x_{i_1} \cdots x_{i_l} x_{j_2} \cdots x_{j_m}$ $(i_\alpha, j_\beta \in \{1, 2, \cdots, n\})$

$-\sum_{k=1}^{n} x_k$ が単位元であり、結合則をみたす。

◎ 発散 cocycle の (normalized) special derivation への制限は $\dot{\rightsquigarrow}$ と cyclic symmetrizer $N^\dagger$ によって表わされる

定理 (K.) θ : special expansion, f : standard うめこみによる $S=\Sigma_{0,n+1}$ の framing

$\Rightarrow$ δ^{+,θ_f} の最低次項は次数 -1 であり, それの $\rho=0$ で値をとったものは次で与えられる ($X_i \in H$)

$$\delta^{+,\theta_f}_{(-1)}(N^+(X_1\cdots X_m))\big|_{\rho=0}$$

$$=\sum_{1\leq i<j\leq m} N^+(X_i \rightsquigarrow X_j X_{j+1}\cdots X_m X_1\cdots X_{i-1})\,\hat{\otimes}\,N^+(X_{i+1}\cdots X_{j-1}) - N^+(X_{j+1}\cdots X_m X_1\cdots X_{i-1})\,\hat{\otimes}\,N^+(X_j \rightsquigarrow X_i X_{i+1}\cdots X_{j-1})$$

とくにその $N^+(\hat{T})\,\hat{\otimes}\,N^+(1)$-成分は (Alekseev-Torossian の定式化による) 発散 cocycle の (-1) 倍にひとしい

(**感想** $\Sigma_{0,3}$ について Turaev 余括弧積をうまく tensor 表示するためには (Alekseev-Torossian の意味での) 柏原-Vergne 問題の解 (これは special expansion とみなせる) を θ として使うとよいように見える.)