岐阜数理科学セミナー　2014年8月18日(月) 16:00-17:30くらい

岐阜大学教育学部 4階 A426教室

「曲面上の曲線たちのつくる代数系について」

河澄響矢 かわずみなりや (東大・数理)
久野雄介 氏 (津田塾大・学芸) との共同研究

摘要

曲面上の曲線たちのつくる代数系
||
Goldman-Turaev Lie 双代数 $\xrightarrow{\text{作用}}$ 曲面の基本群

↑ log をとる　　⇑ 線型近似

曲面の写像類群 $\xrightarrow{\text{作用}}$ 曲面の基本群　　低次元topology

⇑ 骨組みをとる

曲面の微分同相群 $\xrightarrow{\text{作用}}$ 曲面　　力学系

線型近似

Lie 代数
log ↑　⇑ 線型近似　↓ exp
Lie 群

目次

§1. Goldman-Turaev Lie 双代数

S : 向きづけられた連結 compact 曲面，境界 ∂S が空でない

($\Longrightarrow$ 曲面の分類定理　$\exists g \geq 0,\ \exists n \geq 0$

$$S \cong \Sigma_{g,n+1} =$$

)

円周 $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ から曲面 S への連続写像 (loop)

- 基点 $* \in S$ を考える (based)
- 基点を考えない (free)

(あとでは $* \in \partial S$ ととる)

loop の homotopy (連続変形)

- 基点を動かさない (based)
- 基点を考えない (free)

基本群 $\pi_1(S,*) =$ (based loop の全体を based homotopy で同一視したもの)

$\hat{\pi} = \hat{\pi}(S) = [S^1, S] =$ (free loop の全体を free homotopy で同一視したもの)

$$|\ |: \pi_1(S,*) \longrightarrow \hat{\pi}(S) = \pi_1(S,*)/\text{conjugate}$$ 基点を忘れる写像

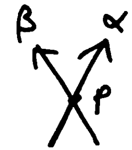
$$\gamma \longmapsto |\gamma|$$

◎ Goldman-Turaev Lie 双代数は free loop に関する代数系である.

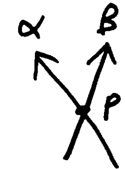
Goldman bracket（括弧積）

$\alpha, \beta \in \hat{\pi}$ free loops，代表元を「一般の位置」にとる．

$$[\alpha, \beta] \overset{\text{def}}{=} \sum_{p \in \alpha \cap \beta} \varepsilon_p(\alpha, \beta)\, |\alpha_p \beta_p| \in \mathbb{Z}\hat{\pi}$$



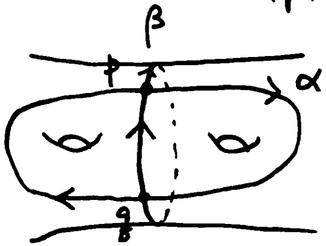
$\varepsilon_p = +1$



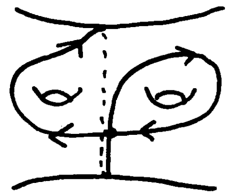
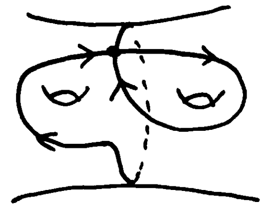
$\varepsilon_p = -1$

$\varepsilon_p(\alpha, \beta) \in \{\pm 1\}$ local intersection number

$\alpha_p, \beta_p \in \pi_1(S, p)$ based loops with basepoint p



$\varepsilon_p = +1$，$\varepsilon_q = -1$

$[\alpha, \beta] = \varepsilon_p$  $+\ \varepsilon_q$ 

pで手術する　　　qで手術する．

（基本群の積と曲面上の交叉形式の混淆物）

定理（W. Goldman, 1986）双線型拡張

$$[\ ,\ ] : \mathbb{Z}\hat{\pi} \times \mathbb{Z}\hat{\pi} \longrightarrow \mathbb{Z}\hat{\pi}$$

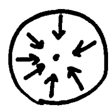
は well-defined であって、$\mathbb{Z}\hat{\pi}$ に Lie 代数の構造を定める．

$\mathbb{Z}\hat{\pi}$：曲面 S の Goldman Lie 代数

背景と展開

- S.Wolpert による Teichmüller 空間の Weil-Petersson 幾何の公式を背景にもつ
- もう一つの背景として M.Atiyah-R.Bott にはじまる 2次元 gauge 理論がある. つまり, 曲面上の平坦束の moduli 空間上の Poisson bracket の抽象化になっている.
- これまでは平坦束の moduli 空間の文脈で研究されることが多かった.
- M.Chas-D.Sullivan は弦理論をふまえつつ, Goldman Lie 代数を曲面から一般次元の多様体に拡張した ("String Topology")

技術的注意

$1 :=$  $\in \hat{\pi}$ 一点につぶれる free loop. (constant loop)

$1 \in \mathrm{Center}(\mathbb{Z}\hat{\pi})$ つまり $\forall \alpha \in \hat{\pi}$, $[1, \alpha] = 0$ ($\because$ $1 \cap \alpha = \phi$)

$\mathbb{Z}\hat{\pi}' := \mathbb{Z}\hat{\pi}/\mathbb{Z}1$ 商として Lie 代数となる.

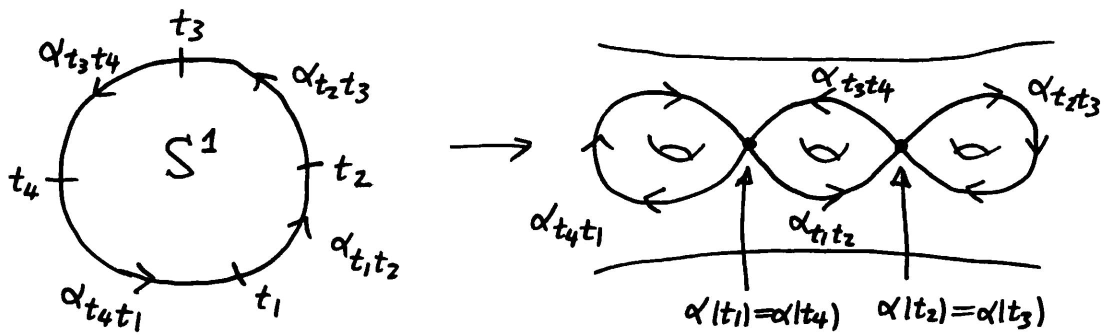
$|\ |' : \mathbb{Z}\pi_1(S, *) \xrightarrow{|\ |} \mathbb{Z}\hat{\pi} \to \mathbb{Z}\hat{\pi}'$ quotient map.

Turaev cobracket (余括弧積)

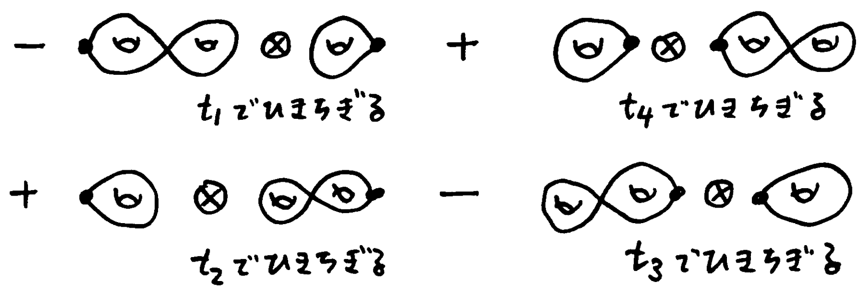
$\alpha \in \hat{\pi}$, 代表元を「一般の位置」にとる.

$$D_\alpha := \{ (t_1, t_2) \in S^1 \times S^1 \;;\; t_1 \neq t_2 ,\ \alpha(t_1) = \alpha(t_2) \}$$

$$\delta(\alpha) \overset{\text{def}}{=} \sum_{(t_1,t_2)\in D_\alpha} \varepsilon_{\alpha(t_1)}(\dot{\alpha}(t_1), \dot{\alpha}(t_2))\, |\alpha_{t_1 t_2}|' \otimes |\alpha_{t_2 t_1}|' \in \mathbb{Z}\hat{\pi}' \otimes \mathbb{Z}\hat{\pi}'$$

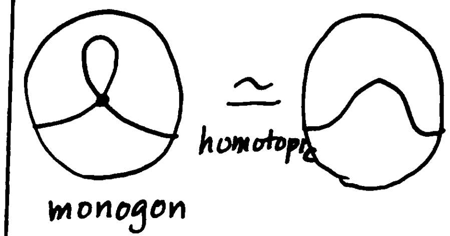


$\delta(\alpha) =$



商 $\mathbb{Z}\hat{\pi}' = \mathbb{Z}\hat{\pi}/\mathbb{Z}1$ をとる

理由



定理 (V. Turaev, 1991) 線型拡張

$$\delta : \mathbb{Z}\hat{\pi}' \longrightarrow \mathbb{Z}\hat{\pi}' \otimes \mathbb{Z}\hat{\pi}'$$

は well-defined であって, $\mathbb{Z}\hat{\pi}'$ に (Drinfel'd の意味での) Lie 双代数の構造を定める.

($\mathbb{Z}\hat{\pi}'$: 曲面 S の Goldman-Turaev Lie 双代数)

背景

・1970年代からの Turaev 自身による曲面上の曲線についてのさまざまな代数演算の研究がある

・1991年の論文では結び目の量子不変量の文脈での Goldman-Turaev Lie 双代数の量子化が議論されている.

技術的注意

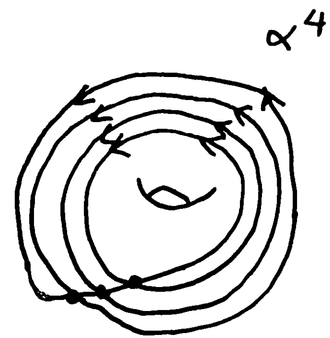
・compatibility axiom $\forall u, \forall v \in \mathbb{Z}\hat{\pi}'$

$$\delta[u,v] = ad(u)(\delta v) - ad(v)(\delta u)$$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Ker}\,\delta < \mathbb{Z}\hat{\pi}'$ Lie subalgebra

・δ(単純閉曲線のベキ) $= 0$

(∵) $\delta(\alpha^n) = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha^k \otimes \alpha^{n-k} - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha^{n-k} \otimes \alpha^k = 0$ //



3点の自己交叉

§2. Dehn twists と 曲線による 曲線の微分

(free loop) (based loop)

S : 向きづけられた連結 compact 曲面, 境界 ∂S が空でない

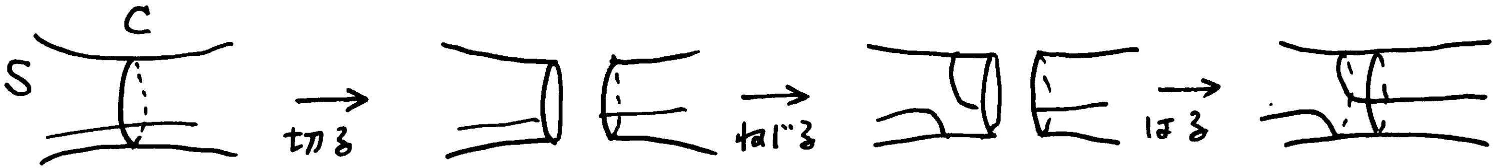
$$\mathcal{M}(S) := \{\varphi : S \to S : \text{向きを保つ微分同相},\ \varphi|_{\partial S} = id_{\partial S}\} / \partial S \text{を点毎にとめる isotopy}$$
$$= \pi_0 \mathrm{Diff}_+(S \ \mathrm{rel}\ \partial S)$$

写像類群 (mapping class group, Teichmüller modular group)

定理 (M. Dehn - W. Lickorish)

$\mathcal{M}(S)$ は Dehn twist たちによって生成される

Dehn twist $t_C \in \mathcal{M}(S)$, $C \subset S \setminus \partial S$ 単純閉曲線



右手 Dehn twist, $\mathcal{M}(S)$ の元として well-defined.

久野
Dehn twist t_C の曲面の基本群の第二巾零商 π/Γ_3 への作用の記述

Picard-Lefschetz 公式
$(t_C)_*(u) = u - (u\cdot[C])[C]$, $(\forall u \in H_1(S;\mathbb{Z}) = \pi/\Gamma_2)$

Dehn twist t_C は $\frac{1}{2}(\log C)^2$ で表わされるように見える.

証明の鍵（久野・河澄）「based loop を free loop で微分する」

$\alpha \in \hat{\pi}(S)$, $*', *'' \in \partial S$.

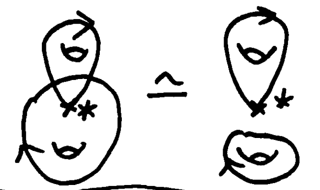
$\gamma \in \Pi S(*', *'') = \left\{ \gamma : [0,1] \to S ; \begin{array}{l} \gamma(0) = *' \\ \gamma(1) = *'' \end{array} \right\} /$ 端点をとめる homotopy

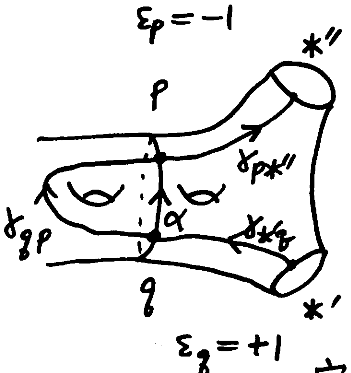
（$*' = *''$ のとき $\Pi S(*', *'') = \pi_1(S, *')$）

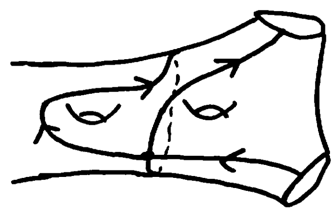
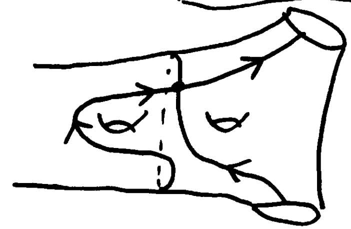
α と γ の代表元は「一般の位置」にとる.

$$\sigma(\alpha)(\gamma) \overset{\text{def}}{=} \sum_{p \in \alpha \cap \gamma} \varepsilon_p(\alpha, \gamma)\, \gamma_{*'p}\, \alpha_p\, \gamma_{p*''} \in \mathbb{Z}\Pi S(*', *'')$$

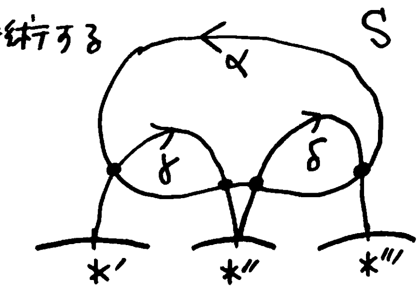
$*', *'' \in \partial S$ の理由





$\sigma(\alpha)(\gamma) = \varepsilon_p$  $+\ \varepsilon_q$ 

p で手術する　　　　q で手術する



定理（久野・河澄）双線型拡張

$$\sigma : \mathbb{Z}\hat{\pi}(S) \times \mathbb{Z}\Pi S(*', *'') \longrightarrow \mathbb{Z}\Pi S(*', *'')$$

は well-defined であって 次をみたす.

(1) $\forall \alpha \in \hat{\pi}(S)$, $\forall \gamma \in \Pi S(*', *'')$, $\forall \delta \in \Pi S(*'', *''')$

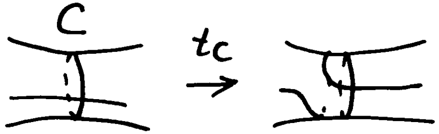
$$\sigma(\alpha)(\gamma\delta) = \sigma(\alpha)(\gamma)\,\delta + \gamma\,\sigma(\alpha)(\delta) \qquad \text{(Leibniz rule)}$$

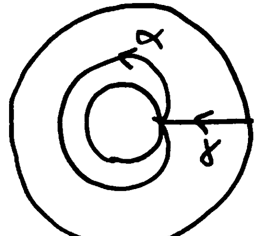
(2) $\forall \alpha, \forall \beta \in \hat{\pi}(S)$, $\forall \gamma \in \Pi S(*', *'')$

$$\sigma([\alpha, \beta])(\gamma) = \sigma(\alpha)\big(\sigma(\beta)(\gamma)\big) - \sigma(\beta)\big(\sigma(\alpha)(\gamma)\big) \qquad \text{(Lie 代数準同型)}$$

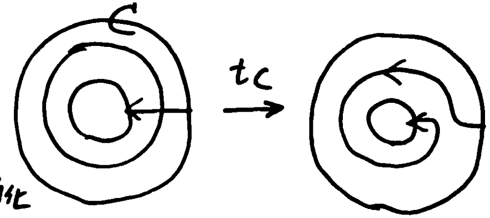
Dehn twist 公式の証明

(i) annulus (円環面) の場合





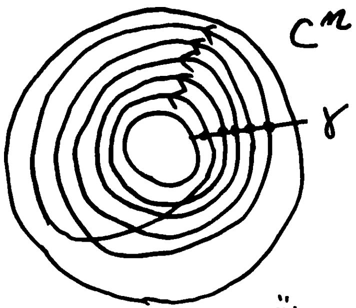
$|\alpha| = C$



$$\log t_C \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (t_C - 1)^n \in \mathrm{Der}((\mathbb{Q}\pi S|_{\partial S})^{\wedge})$$

← 完備化

$$\begin{cases} t_C(\gamma) = \gamma\alpha \\ t_C(\alpha) = \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} (\log t_C)(\gamma) = \gamma \log \alpha \\ (\log t_C)(\alpha) = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \sigma(C^n)(\gamma) = n\gamma\alpha^n \\ \sigma(C^n)(\alpha) = 0 \quad (\because\ C \cap \alpha = \phi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma(f(C))(\gamma) = \gamma\alpha f'(\alpha) \\ \sigma(f(C))(\alpha) = 0 \end{cases}$$

と比較する

$\alpha f'(\alpha) = \log \alpha$

$x f'(x) = \log x$ を解くと

$$f(x) = \int_1 \frac{1}{x} \log x \, dx = \frac{1}{2}(\log x)^2$$

(ii) 一般の場合

$\Longleftarrow$ annulus の場合 ⊕ van Kampen の定理 //

定理 ($\Sigma_{g,1}$ 久野・河澄　一般 久野・河澄, Massuyeau-Turaev)

S : 向きづけられた連結 compact 曲面, $\partial S \neq \phi$

$C \subset S \setminus \partial S$ 単純閉曲線

$$\Longrightarrow \quad t_C = \exp\left(\frac{1}{2}\sigma((\log C)^2)\right) \in \mathrm{Aut}((\mathbb{Q}\pi S|_{\partial S})^{\wedge})$$

つまり $\sigma^{-1}(\log t_C) = \frac{1}{2}(\log C)^2 \in \mathbb{Q}\hat{\pi}(S)^{\wedge}$ ← 完備化

($\frac{1}{2}(\log C)^2$: t_C を曲面上で表現する「模様」)

§3. 写像類群の Lie 代数.

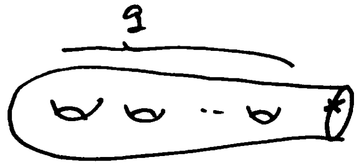
復習 G : Lie 群, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G = T_1 G$: 対応する Lie 代数.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\exp"] & G \\ \cup \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & \cup \\ \begin{pmatrix} 0\text{の充分小さい} \\ \text{開近傍} \end{pmatrix} \arrow[r, "\cong"] & \begin{pmatrix} 1\text{の充分小さい} \\ \text{開近傍} \end{pmatrix} \arrow[l, bend left, "\text{“}\log\text{”}"] \end{tikzcd}$$

(とくに G が巾零ならば $\exp : \mathfrak{g} \xrightarrow{\cong} G$)

以下，かんたんのため

$$S = \Sigma_{g,1} =$$



$* \in \partial S$

とする.

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(\Sigma_{g,1}) = \pi_0 \mathrm{Diff}_+(\Sigma_{g,1} \text{ rel } \partial\Sigma_{g,1}) \quad \text{discrete group} \quad (\Rightarrow \mathrm{Lie}\, \mathfrak{m} = 0)$$

しかし「充分小さい」$\varphi \in \mathfrak{m}$ について $\log \varphi$ を考えることができる.

代数的 approach (Johnson 準同型)

$\pi := \pi_1(\Sigma_{g,1}, *)$: free group of rank $2g$

$H_{\mathbb{Z}} := \pi^{abel} = H_1(S;\mathbb{Z})$

$\Gamma_1 = \pi$, $\Gamma_{k+1} = [\Gamma_k, \Gamma_1]$, $k \geq 1$, 降中心列, $(\pi/\Gamma_2 = H_{\mathbb{Z}})$

定理 (W. Magnus - E. Witt)

$$\mathrm{gr}\,\Gamma \left(:= \bigoplus_{k=1}^{\infty} \Gamma_k/\Gamma_{k+1}\right) = \mathcal{L}(H_{\mathbb{Z}}) \quad \text{free Lie algebra over } H_{\mathbb{Z}}$$

$k \geq 0$

$\mathcal{M}(k) := \mathrm{Ker}(\mathcal{M} \to \mathrm{Aut}(\pi/\Gamma_{k+1}))$ Johnson filtration

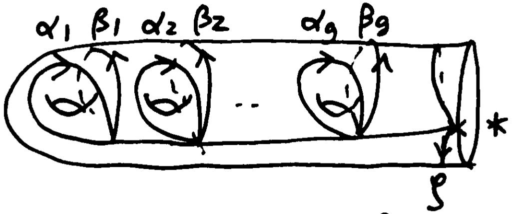
$\mathcal{I} = \mathcal{I}(\Sigma_{g,1}) := \mathcal{M}(1) = \mathrm{Ker}(\mathcal{M} \to \mathrm{Aut}(H_{\mathbb{Z}}))$ Torelli群 "単位元の近傍"

Johnson 準同型

$$\tau^J : gr(\mathcal{I}) := \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}(k)/\mathcal{M}(k+1) \hookrightarrow \mathrm{Der}(\mathcal{L}(H_{\mathbb{Z}}))$$

(derivation Lie algebra)

injective homomorphism of Lie algebras



$\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=1}^{g} \subset \pi$ symplectic generator

$\zeta = \prod_{i=1}^{g} \alpha_i \beta_i \alpha_i^{-1} \beta_i^{-1} \in \pi$ negative boundary loop.

$$\omega := [\zeta] = \left[\prod_{i=1}^{g} \alpha_i \beta_i \alpha_i^{-1} \beta_i^{-1}\right] \in \Gamma_2/\Gamma_3 < \mathcal{L}(H_{\mathbb{Z}})$$ symplectic form

$$\mathrm{Der}^{+}_{\omega}(\mathcal{L}(H_{\mathbb{Z}})) := \left\{ D \in \mathrm{Der}(\mathcal{L}(H_{\mathbb{Z}})) \,;\, D(H_{\mathbb{Z}}) < \bigoplus_{k=2}^{\infty} \Gamma_k/\Gamma_{k+1},\ D\omega = 0 \right\}$$

Morita's $\mathfrak{h}_{g,1}$, Kontsevich's "Lie"

定理 (森田茂之)

$$\tau^J(gr(\mathcal{I})) \subsetneqq \mathrm{Der}^{+}_{\omega}(\mathcal{L}(H_{\mathbb{Z}}))$$

森田 trace

のちによりくわしく 榎本(直也)・佐藤(隆夫) trace

幾何的 approach (Goldman-Turaev Lie 双代数)

$\pi = \pi_1(\Sigma_{g,1}, *)$, $* \in \partial \Sigma_{g,1}$

$$\widehat{\mathbb{Q}\pi} := \varprojlim_{p\to\infty} \mathbb{Q}\pi / I\pi^p, \quad I\pi = \mathrm{Ker}\Big(\underset{\sum a_x x \,\mapsto\, \sum a_x}{\mathbb{Q}\pi \to \mathbb{Q}}\Big) \quad \text{augmentation ideal}$$

completed group algebra　　$\{I\pi^p\}_{p=1}^{\infty}$ による位相を入れる.

$$\mathrm{Der}_\partial(\widehat{\mathbb{Q}\pi}) := \left\{ \underset{\text{連続線型}}{D : \widehat{\mathbb{Q}\pi} \to \widehat{\mathbb{Q}\pi}} \;;\; \begin{array}{l} \text{(derivation) } \forall u, \forall v \in \widehat{\mathbb{Q}\pi} \\ \quad D(uv) = (Du)v + u(Dv) \\ (\partial\text{-condition}) \\ \quad D(\zeta) = 0 \end{array} \right\}$$

Kontsevich's "associative"

$$\widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}} := \varprojlim_{p\to\infty} \mathbb{Q}\hat{\pi} / \mathbb{Q}1 + |I\pi^p|$$

completed Goldman-Turaev Lie bialgebra　　$\{\mathbb{Q}1 + |I\pi^p|\}_{p=1}^{\infty}$ による位相を入れる

定理 (久野・河澄)

$\sigma : \widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}} \xrightarrow{\cong} \mathrm{Der}_\partial(\widehat{\mathbb{Q}\pi})$　isomorphism of topological Lie algebras

$\log : \underset{\text{Torelli group}}{\mathcal{I}} \longrightarrow \mathrm{Der}_\partial(\widehat{\mathbb{Q}\pi})$, $\varphi \mapsto \log \varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (\varphi - 1)^n$　well-defined

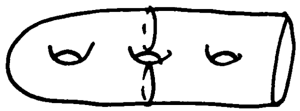
$\tau^G : \mathcal{I} \to \widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}}$, $\varphi \mapsto \sigma^{-1}(\log \varphi)$

geometric Johnson homomorphism.

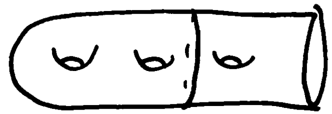
$$\mathrm{gr}(\tau^G) = \tau^J : \begin{tikzcd} \mathrm{gr}(\mathcal{I}) \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\circlearrowleft"] & \mathrm{gr}(\widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}}) \arrow[d, phantom, "\cup"] \\ & \mathrm{Der}^+_\omega(\mathcal{L}(H_\mathbb{Z})) \end{tikzcd}$$

Turaev cobracket ?

<u>定理</u> (J. Powell) Torelli群 $\mathcal{I}$ は



BP maps



BSCC maps

によって生成される

$\delta : \mathbb{Q}\hat{\pi} \longrightarrow \mathbb{Q}\hat{\pi} \hat{\otimes} \mathbb{Q}\hat{\pi}$ completed Turaev cobracket

$\delta(\tau^G(\mathrm{BP\ map})) = \delta(\tau^G(\mathrm{BSCC\ map})) = 0$ (∵ Dehn twist 公式 $\oplus$ δ(SCCのベキ)$=0$ //)

<u>定理</u> (久野・河澄)

(1) $\delta \circ \tau^G = 0 : \mathcal{I} \xrightarrow{\tau^G} \mathbb{Q}\hat{\pi} \xrightarrow{\delta} \mathbb{Q}\hat{\pi} \hat{\otimes} \mathbb{Q}\hat{\pi}$

(2) 森田trace は $\mathrm{gr}(\delta)$ にふくまれる. ⇝ 森田trace の幾何的解釈

<u>定理</u> (榎本)

榎本・佐藤 trace は $\mathrm{gr}(\delta)$ にふくまれない

<u>定理</u> (河澄)

- Turaev cobracket の正則homotopy版は榎本・佐藤 trace をふくむ
- Turaev cobracket の正則homotopy版を種数 0 で考えると柏原-Vergne問題の発散cocycleがでてくる ⇝ 絶対Galois群 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の伊原理論と関係?