強擬凸領域におけるベルグマン核の不変式論

平 地 健 吾

Fefferman は論文『複素解析に現れる放物型不変式論』[16] において (C^∞ 境界をもつ) 強擬凸領域の幾何, 解析の研究プログラムを提案した. その基本的なアイディアは, 強擬凸領域のベルグマン核をリーマン多様体上の熱核の類似と考えてみよう, というものである. よく知られているように, 熱核の不変式論を用いた研究は指数定理を含む壮大な理論に発展している. これに対応する「ベルグマン核の不変式論」を作ろうというのがこのプログラムである. このとき現れる構造群は $SU(1,n)$ の放物型部分群であり, これが「放物型不変式論」の名前の由来である. 本稿ではこのプログラムに沿った研究の現状を紹介する.

複素領域 $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ のベルグマン核 $K_\Omega(z,\overline{w})$ は Ω 上の L^2 正則函数に対する再生核として定義される. とくにその対角線集合への制限 $K_\Omega(z) = K_\Omega(z,\overline{z})$ は Ω 上の滑らかな関数を与える. $K_\Omega(z)$ もベルグマン核と呼ばれ, 以後, 変数を省略した K_Ω はこれをさす. 粗い仮定 (例えば Ω の有界性) の下では $K_\Omega(z) > 0$ であり, もう少し (例えば強擬凸性を) 仮定すると $K_\Omega(z) \to +\infty$ (z が境界に近づくとき) である. 以下では境界 $\partial\Omega$ での K_Ω の特異性に含まれる局所幾何の情報を問題にする.

局所幾何のよりどころとなるベルグマン核の性質は双正則写像 $\Phi\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ に対する変換則

$$K_{\Omega_2} \circ \Phi = |\det \Phi'|^{-2} K_{\Omega_1} \tag{0.1}$$

である. ここで $\det \Phi'$ は Φ の正則なヤコビアンである. よく知られているように, この変換則はベルグマン計量 $-i\partial\overline{\partial}\log K_\Omega$ の双正則不変性を導き, 複素幾何へのリーマン幾何の応用を可能とする. またこの変換則を Φ の満たす関係式と見れば, ベルグマン核の境界挙動の解析を通して, 強擬凸領域の間の双正則写像の境界での微分可能性を評価することができる [14]. 実際, この [14] は [16] の発端となった仕事であり, そこではベルグマン核の特異性の形が決定され使われている. 一般にベルグマン核の特異性を幾何的に完全に記述することは困難である. ベルグマン核の閉じた表示が初等的に書けるのは領域の対称性が高い場合だけである. 強擬凸領域に限れば, ベルグマン核の具体的な表示から特異性の形を読み取れるのは球 (と双正則同値な領域) のみである.

プログラムの最初の目標は一般の強擬凸領域のベルグマン核の境界特異性を局所幾何的に書き下すアルゴリズムを与えることである (これの説明が本稿の中核をなす). この問題を考えるカギとなるのはベルグマン核の変換則 (0.1) である. この変換則を一般化し (各強擬凸領域 Ω に対して $L_\Omega \in C^\infty(\Omega)$ を対応させる) 領域汎関数

$L = \{L_\Omega\}$ で双正則変換則

$$L_{\Omega_2} \circ \Phi = |\det \Phi'|^{-2w/(n+1)} L_{\Omega_1} \tag{0.2}$$

を満たすものを考える. このような L をウェイト w の双正則不変量と呼ぶ. とくにベルグマン核はウェイト $n+1$ を持つ. このような双正則不変量全体の構造を明らかにし, その具体的な構成方法を与えることができれば, ベルグマン核の特異性を不変な形に整理する仕方が自然にわかると期待される. これが問題解決の方針である. 実際には L として局所双正則不変量, すなわち各境界点の近傍で局所化可能なものだけを考える. さらに不変量を形式的に考え (各 L_Ω を境界点での形式的冪級数とみなして) 問題を代数的に定式化する.

強擬凸領域の局所幾何は境界上の CR 幾何である. よってまず問題になることは, 領域内部で定義されている局所双正則不変量をどのようにして境界の CR 構造と関係づけるか, である. そこで領域汎関数の代わりに, 局所化可能な境界汎関数 (各強擬凸領域の境界 Ω に対して $L_{\partial\Omega} \in C^\infty(\partial\Omega)$ を対応させる) で境界上で変換則 (0.2) をみたすものを考える. ここでは, これらを単に CR 不変量と呼ぶことにする. CR 不変量と局所双正則不変量を複素モンジュ・アンペール作用素を介して結ぶのが Fefferman [16] によって導入されたアンビエント計量構成法 (ambent metric construction) である. 強擬凸領域では複素モンジュ・アンペール方程式のディリクレ境界値問題の解 u から完備アインシュタイン・ケーラー計量 $g^{\mathrm{EK}} = i\partial\overline{\partial}\log u$ が得られる [7]. もし u が領域の滑らかな定義関数となっていれば $g[u] = i\partial\overline{\partial}\,(|z_0|^2 u(z))$ は $(z_0, z) \in \mathbf{C}^* \times \Omega$ 上のリッチ平坦なローレンツ・ケーラー計量 (アンビエント計量と呼ばれる) を与え, この計量の不変量として定義される局所双正則不変量の境界値が全ての CR 不変量を与えるであろう — というのが理想的な筋書きである. しかし実際にはいくつかの障害が現れる. u は境界で弱い特異性をもち $g[u]$ の高次の微分を考えることはできない. また u は局所的には決まらない. これらの障害を回避しないと, ベルグマン核の双正則不変な漸近展開を無限展開として得ることができない.

§1 ではベルグマン核および熱核の漸近展開についての解析的な結果を復習し, §2 ではその漸近展開の不変式論を用いた (部分的な) 記述を与える. §3 ではこの不変式論の代数的な側面を, §4 および §5 ではその幾何的な側面を説明する. §6 では上で述べたモンジュ・アンペール方程式の解に現れる障害を回避する方法を説明し, ベルグマン核の局所双正則不変な無限漸近展開を与える.

以上の結果がプログラムの第一歩である. こうして得られたベルグマン核の局所幾何的な漸近展開から大域幾何的および大域解析的な情報を取り出すのが今後の目標である. §7 では展望としてベルグマン核と指数定理の関係について考察する.

Fefferman のプログラムは, 多変数関数論の枠組みを超えて放物型不変式論に一

般化されている. §8 では共形幾何での類似の理論に触れる. 共形構造の構造群は $O(n,1)$ の放物型部分群であり放物型不変式論の対象となる. 放物型幾何という枠組みについては Graham による解説 [23] がある.

本稿で解説する Fefferman のプログラムは筆者の視点から整理したものであり, Fefferman の提案したものの一部に過ぎない. プログラムの全体像は Fefferman の講義録 [4] の中で生き生きと語られている. その後の進展については Bailey [1], 平地-小松 [28], Gover [20], Eastwood [11] などの解説がある. このプログラムが提案される以前のベルグマン核の研究の状況については Diederich によるコンパクトな論説 [10] がある.

1　ベルグマン核の漸近展開

まずベルグマン核の漸近展開についての解析的な結果を, 熱核と対比させながら, 復習する. 本稿で必要な解析の結果はここで述べるものだけであり, これらがベルグマン核の不変式論の前提となる.

領域 $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ に対し $A^2(\Omega)$ を Ω 上の L^2 正則関数全体のなすヒルベルト空間とする. $A^2(\Omega)$ の完全正規直交系 $\{\varphi_j(z)\}_{j=1}^\infty$ に対し, 級数

$$K_\Omega(z,\overline{w}) = \sum_{j=1}^\infty \varphi_j(z)\overline{\varphi_j(w)}$$

は $(z,w) \in \Omega \times \Omega$ 上で広義一様収束し $(z,\overline{w})$ の正則関数を与える. K_Ω は完全正規直交系の選び方によらずに定まり, Ω の gt ベルグマン核と呼ばれる. このとき任意の $f \in A^2(\Omega)$ に対して $f(z) = \int_\Omega K_\Omega(z,\overline{w}) f(w)|dw|^2$ が成り立ち, K_Ω は $A^2(\Omega)$ の再生核として特徴付けられる. ここで $|dw|^2$ は $\mathbf{C}^n$ の体積要素である.

一方, コンパクト・リーマン多様体 (M,g) 上の熱核は熱方程式 $(\partial_t + \Delta_x)u(x,t) = 0$ の初期値 $u(x,0) = f(x)$ の解を与える積分核 $H_t(x,y)$ であり, Δ_x の固有関数の完全正規直交系 $\{\varphi_j(z)\}_{j=1}^\infty$, $\Delta_x \varphi_j = \lambda_j\, \varphi_j$, をとれば

$$H_t(x,y) = \sum_{j=1}^\infty e^{-\lambda_j t} \varphi_j(x)\varphi_j(y) \tag{1.1}$$

と表すことができる. モデルケースであるユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の熱核は $H_t(x,y) = \mathrm{const.}\, t^{-n/2} \exp(-\mathrm{dist}(x,y)^2/2t)$ であり, とくに

$H_t(x,x) = \mathrm{const.}\, t^{-n/2}$ が成り立つ. ここで const. は次元 n にのみ依存する絶対定数である. 一般の (M,g) でも $H_t(x,x)$ は $t \to 0$ のとき同様な主要部をもち

$$H_t(x,x) \sim \mathrm{const.}\, t^{-n/2}\Big(1 + \sum_{k=1}^\infty \gamma_k(x) t^k\Big) \tag{1.2}$$

という漸近展開を許す．ここで $\gamma_k(x)$ は計量 g から局所的に決まる M 上の滑らかな関数である．よって熱核は (1.1) の対角線集合上での積分と (1.2) の二つの表示を通して (M,g) のスペクトル $\{\lambda_j\}$ と曲率の積分の関係を与える．

ベルグマン核に話を戻そう．強擬凸領域のモデル空間は**ジーゲル領域**

$$\Omega_0 = \{(z', z_n) \in \mathbf{C}^n : z_n + \overline{z}_n - |z'|^2 > 0\}$$

(以後これを単に**ジーゲル領域**とよぶ) で, そのベルグマン核は

$$K_{\Omega_0}(z) = c_n\,(z_n + \overline{z}_n - |z'|^2)^{-n-1}, \quad c_n = n!/\pi^n,$$

である．この場合, z を境界に近づけるとベルグマン核 $K_{\Omega_0}(z)$ は定義函数の $-(n+1)$ 乗のオーダーで増大する．一般の**強擬凸領域** — 境界の各点において $\partial\Omega_0$ の局所双正則像で二次まで近似できる領域 — のベルグマン核でも主要部は同様であるが, 弱い対数特異性が現れる．

定理 1.1 ([31], [14]) 強擬凸領域 Ω のベルグマン核は次の形の特異性をもつ:

$$K_\Omega = \varphi^{\mathrm{B}}\,\rho^{-n-1} + \psi^{\mathrm{B}}\log\rho \tag{1.3}$$

ここで $\rho \in C^\infty(\overline{\Omega})$ (境界まで込めて滑らかな関数) は Ω の定義関数 ($\Omega = \{\rho > 0\}$ かつ境界 $\partial\Omega$ 上で $d\rho \neq 0$ を満たす関数), $\varphi^{\mathrm{B}}, \psi^{\mathrm{B}} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ である．φ^{B} の境界値は $c_n\,J[\rho]$ の境界値と一致する．ここで $J[\,\cdot\,]$ は**複素モンジュ・アンペール作用素**

$$J[\rho] = (-1)^n \det\begin{pmatrix} \rho & \partial\rho/\partial z_j \\ \partial\rho/\partial\overline{z}_k & \partial^2\rho/\partial z_j\partial\overline{z}_k \end{pmatrix}_{j,k=1,\dots,n} \tag{1.4}$$

である．さらに各境界点 $p \in \partial\Omega$ に対して $\varphi^{\mathrm{B}} \bmod O^{n+1}(\partial\Omega)$ および ψ^{B} の p でのテーラー級数は ρ の p でのテーラー係数で決定される．ここで $f = O^m(\partial\Omega)$ は $f/\rho^m \in C^\infty(\overline{\Omega})$ の略記である．

展開の係数 $\varphi^{\mathrm{B}}, \psi^{\mathrm{B}}$ の中には Ω の局所幾何的な不変量が含まれている．熱核の展開のように $\varphi^{\mathrm{B}}, \psi^{\mathrm{B}}$ をさらに定義関数の冪に展開し

$$\begin{aligned} \varphi^{\mathrm{B}} &= \varphi_0 + \varphi_1\rho + \cdots + \varphi_n\rho^n + O^{n+1}(\partial\Omega), \\ \psi^{\mathrm{B}} &\sim \varphi_{n+1} + \varphi_{n+2}\rho + \cdots + \varphi_{n+k+1}\rho^k + \cdots \end{aligned} \tag{1.5}$$

その係数 $\varphi_k(z) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ を境界の曲率を用いて記述したい．ただしこの場合 ρ と変数 z は独立ではないので (1.5) をテーラー展開として考えることはできない．もちろん, 境界の近傍 $\{0 \le \rho < \epsilon\}$ を C^∞ 同型で $\partial\Omega \times [0,\epsilon)$ のように直積に分解することができるが, それでは展開 (1.5) の双正則不変性が失われてしまう．そこでウェイト -1 の変換則をもつ定義関数 ρ を構成し φ_k をウェイト k をもつ双正則不変量として与える方法を考える．

2　幾何的不変量を用いた核関数の展開

本節では φ^{B} に対する展開 (1.5) について述べる．その手本となるのが熱核の展開のリーマン曲率を用いた記述である．熱核の漸近展開 (1.2) の係数 γ_k の決定には直交群 $O(n)$ に対するワイルの不変式論を用いることができる．結果として γ_k は次のような完全縮約の一次結合で表される:

$$\mathrm{contr}(\nabla^{p_1} R \otimes \cdots \otimes \nabla^{p_s} R) \tag{2.1}$$

ここで R は g のリーマン曲率, $\nabla^p R$ はその p 階の共変微分, 縮約は計量 g に関してとる．さらに計量のスケーリングに関する熱核の変換則をみれば γ_k には $\sum p_j = 2(k-s)$ を満たすものだけが現れることがわかる．このような組み合わせは各 k に対しては有限個であり, 書き下すのは初等的である．例えば展開の最初の 3 項は次で与えられる:

$$H_t(x,x) \sim t^{-n/2}\Big(c_n^0 + c_n^1 S\, t + (c_n^2\, S^2 + c_n^3 \,\|\,\mathrm{Ric}\|^2 + c_n^4\, \|R\|^2 + c_n^5\, \Delta_x S)\, t^2 + \cdots\Big)$$

ここで c_n^j は次元 n によって決まる定数, S はスカラー曲率である．

ベルグマン核のときは, まず展開の記述に使う強擬凸領域の不変量を構成する必要がある．この場合にも上述のリーマン幾何での構成方法を利用することができる．Ω の定義関数 ρ をとり $\mathbf{C}^* \times \overline{\Omega}$ 上の関数 $\rho_\#(z_0, z) = |z_0|^2 \rho(z)$ を考えれば, 強擬凸性により,

$$g[\rho] = \sum_{j,k=0}^{n} \frac{\partial^2 \rho_\#}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}\, dz_j d\overline{z}_k$$

は $\mathbf{C}^* \times \partial\Omega$ の近傍でのローレンツ・ケーラー計量を与える．$R = R[\rho]$ を $g = g[\rho]$ の曲率テンソル, $R^{(p,q)} = \overline{\nabla}^{q-2} \nabla^{p-2} R$ をその共変微分とする．このとき $w \in \mathbf{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$ に対して $\sum p_j = \sum q_j = w + s$ を満たす完全縮約

$$W_\# = \mathrm{contr}(R^{(p_1,q_1)} \otimes \cdots \otimes R^{(p_s,q_s)}) \tag{2.2}$$

の一次結合を**ウェイト w のワイル多項式**と呼ぶ．ワイル多項式 $W_\#$ は Ω の定義関数 ρ を与えるごとに $\mathbf{C}^* \times \overline{\Omega}$ 上の (正確には $\mathbf{C}^* \times \partial\Omega$ の近傍での) 滑らかな関数 $W_\#[\rho]$ を定める．この関数は $W_\#[\rho](z_0, z) = |z_0|^{-2w} W[\rho](z)$ という表示をもち $\overline{\Omega}$ 上の滑らかな関数 $W[\rho](z)$ を与える．以下ではこの対応により $W_\#$ と W を同一視し, W も**ワイル多項式**と呼ぶことにする (作り方も込めて考えている).

定理 2.1 ([16], [3]) ウェイト k のワイル多項式 W_k, $(k = 0, 1, \ldots, n)$ が存在し, 任意の強擬凸領域 Ω に対して次の展開が成り立つ:

$$K_\Omega = r^{-n-1} \sum_{k=0}^{n} W_k[r]\, r^k + O(\log r) \tag{2.3}$$

ここで r は $J[r]=1+O^{n+1}(\partial\Omega)$ を満たす Ω の定義関数, $O(\log r)$ は境界で高々 $\log r$ の増大度しかもたない関数である.

とくにベルグマン核の展開の最初の 3 項は次で与えられる ($W_1=0$ となっている) :

$$K_\Omega = r^{-n-1}(c_n + c'_n \|R\|^2 r^2 + \cdots),$$

ここで c_n, c'_n は n によって決まる定数である ($c_n = n!/\pi^n$ は明白であるが $c'_n = (n-2)!/(24\,\pi^n)$ も具体的な計算によりわかる [29]). 熱核の展開に比べて現れる項が少ないのは $g[r]$ が (近似的に) リッチ平坦計量であるからである.

定理 2.1 で課した条件 $J[r]=1+O^{n+1}(\partial\Omega)$ を満たす定義関数は具体的に構成することができ mod $O^{n+2}(\partial\Omega)$ で一意的である [15]. この r を **Fefferman の定義関数**, $g[r]$ を Ω に附随する**アンビエント計量**とよぶ. Fefferman の定義関数は前節で要請したようにウェイト -1 の変換則を満たす (r の定義に含まれる $O^{n+2}(\partial\Omega)$ の誤差は無視する). また上記の展開は r の選び方に依存せずに Ω だけから決定される:

補題 2.2 ([16], [3]) ウェイト w のワイル多項式 W に対して $W[r]\,r^w \bmod O^{n+1}(\partial\Omega)$ は Fefferman の定義関数 r の選び方によらない.

この補題はウェイトが $n+1$ 以上であれば無内容であり, ワイル多項式を用いて Ω の情報を取り出すことはできなくなる. 定理 2.1 のウェイトに関する制限を取り除くには新しいアイディアが必要である. これについては §6 で述べることにし, まずは展開 (2.3) を取り巻く不変式論, 双正則幾何の枠組みを説明する.

3 どのような不変式論を考えるのか

前節で述べたベルグマン核のワイル多項式を用いた表示は, 結果だけを見ると熱核の場合の直訳になっている. しかし, その証明で用いられる不変式論には大きな違いがある. 本節ではベルグマン核の記述にどのような不変式論の問題が現れるのか, それがどのように解決されるのか (されていないのか) を説明する.

一般に G を半単純群, H をその放物型部分群として不変式の構成問題をいくつかの設定で考える. 問題は (研究が進み分りやすいという意味で) 易しい順に並べている.

問題 0 G-加群 V 上の G-不変多項式を決定せよ.

熱核の展開に現れるのはこの問題であり $G=O(n)$, V は $\mathbf{R}^n$ 上のテンソル空間となる. 半単純群の表現は詳しく研究されており, 問題 0 は解けている. 全ての G-不変多項式をワイル多項式 (テンソルの完全縮約) で与えることができる.

問題 1 G-加群 V 上の H-不変多項式を決定せよ.

この問題も解けている. 全ての H-不変多項式は G-不変であることが示され 問題 0 に帰着される [12].

問題 2 Y を G-加群 V の (G-不変とは限らない) H-部分加群とする. Y 上の H-不変多項式を決定せよ.

これがベルグマン核の展開に現れる問題であり $G=SU(1,n)$, V は $\mathbf{C}^{n+1}$ 上のテンソル空間, Y として Ω が強擬凸領域全体を動くときのアンビエント計量の曲率テンソル (およびその全ての共変微分) の動く範囲を考える. アンビエント計量は z_0 方向にのみ斉次性をもつため Y は G-不変にはならない. (曲率テンソルはリッチ恒等式などの非線形な関係式もみたすため Y は線形部分空間ではないが, Y の原点での接空間をとることにより問題を H-加群の場合に帰着することができる.) この Y に対してはアンビエント計量の曲率の満たす関係式を詳しく調べることにより実は Y 上の H-不変多項式も V 上のワイル多項式として表されることがわかる (後述の Fact 2a 参照). ここでは Y の形が重要であり Y を取りかえればワイル多項式として表せない Y 上の H-不変多項式も現れる (Fact 2b 参照). このような H-不変多項式の構造の Y の形への依存性は完全可約性をもつ半単純群の不変式論には現れない特徴である.

問題 3 H-加群 Y 上の H-不変多項式を決定せよ (Y を含む G-加群は与えられていない).

CR 不変量の定義はこの形で与えられる (定義 4.1). このままの設定では H-不変多項式の例を作るのも簡単ではない [21], [30]. そこで アンビエント計量を構成してこの問題を問題 2 に帰着させる. 今のところ, この構成方法には障害が現れるため, 問題を完全に帰着させることはできていない. CR 不変量の構成は放物型不変式論の主要な未解決問題である. この問題については §5 および §6 で説明する.

以下ではベルグマン核の展開 (定理 2.1 の証明) に用いられる問題 2 の設定での不変式論の結果を正確に述べる. それらのうちで Fact 2a は Fefferman [16], Bailey-Eastwood-Graham [3] によって得られた放物型不変式論の主要結果である.

ジーゲル領域 Ω_0 を $z\mapsto[1:z_1:\cdots:z_n]\in\mathbf{P}^n$ により射影空間に埋め込む. このとき Ω_0 の正則自己同型群はローレンツ・エルミート形式

$$Q(\zeta,\overline{\zeta})=\zeta_0\overline{\zeta}_n+\zeta_n\overline{\zeta}_0-\zeta'\cdot\overline{\zeta'},\quad \zeta=(\zeta_0,\zeta',\zeta_n)\in\mathbf{C}^{n+1},$$

に関する特殊ユニタリー群 $G=SU(1,n)$ の $\mathbf{P}^n$ への作用として表され, とくに Ω_0 の原点でのイソトロピー群は G の放物型部分群

$$H=\{h\in G: h\,e_0=\lambda\,e_0,\ \lambda\in\mathbf{C}^*\}$$

の作用と対応する. ここで e_0 は縦ベクトル ${}^t(1,0,\dots,0)$ である. このとき $\sigma_{p,q}(h)=\lambda^p\overline{\lambda}^q$, $p,q\in\mathbf{Z}$, は H の指標を与える.

一般の領域 Ω に対しても同様な射影空間への埋め込みを考え, $\mathbf{C}^*$-バンドル $\mathbf{C}^* \times \Omega \to \Omega$ を自然な全射 $\mathbf{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbf{P}^n$ の Ω 上への制限と同一視する. このときバンドル上の $r_\#(z_0, z) = |z_0|^2 r(z)$ の形の関数は $\mathbf{C}^{n+1} - \{0\}$ 上の関数 $\varphi(\zeta)$ で斉次性 $\varphi(\lambda\zeta) = |\lambda|^2\varphi(\zeta)$, $\lambda \in \mathbf{C}^*$, を持つものと同一視することができる. このような斉次性をもつ 実数値 C^∞ 関数の e_0 でのジェット全体のなす空間を $\mathcal{E}(1)$ とおく.

原点を境界点として含む Ω_0 の摂動を考えれば, 対応する Fefferman の定義関数 $r_\#$ (の e_0 でのジェット) の族は $\mathcal{E}(1)$ の中を動き, その一次変分全体の集合は $\mathcal{E}(1)$ の調和部分空間

$$\mathcal{H}(1) = \{\varphi \in \mathcal{E}(1) : \Delta\varphi = 0\}, \quad \Delta = \partial_0\partial_{\overline{n}} + \partial_n\partial_{\overline{0}} - \sum_{j=1}^{n-1}\partial_j\partial_{\overline{j}},$$

ただし $\partial_j = \partial/\partial\zeta_j$, $\partial_{\overline{j}} = \partial/\partial\overline{\zeta}_j$, になる. ここでローレンツ・ラプラシアン Δ は複素モンジュ・アンペール作用素の $r_0 = z_n + \overline{z}_n - |z'|^2$ を中心とした線形化作用素として現れる (§5 参照).

注意 3.1 実際には Fefferman の定義関数 r は近似的にしか決まらないのでその一次変分も $\varphi \bmod O(Q^{n+2})$ までしか意味をもたない. この点については §6 で改めて考察する.

上で考えた斉次性を一般化し, 各実数 s に対して $\mathcal{E}(s)$ を e_0 の近傍で定義された実数値 C^∞ 関数のジェットで $\varphi(\lambda\zeta) = |\lambda|^{2s}\varphi(\zeta)$, $\lambda \in \mathbf{C}^*$, を満たすもの全体のなす空間, $\mathcal{H}(s)$ をその調和部分空間とする. このとき H の $\mathbf{C}^{n+1}$ への作用は $\mathcal{H}(s)$ の H-加群としての構造を誘導する. この作用は $\mathcal{H}(s)$ の各元 φ をテンソル $T = (T_{\alpha\overline{\beta}})_{|\alpha|,|\beta|\ge 0}$, ここで $T_{\alpha\overline{\beta}} = \partial_\alpha\partial_{\overline{\beta}}\varphi(e_0)$, と同一視するときには (指標 $\sigma_{p,q}$ に関するスカラー倍のずれを除いて) 通常の共変テンソル作用となる. この $h \in H$ の $T \in \mathcal{H}(s)$ への作用を $h.T$ と書く.

モデル問題 1 $\mathcal{H}(s)$ 上の H-不変多項式を決定せよ. ここで (ウェイト w の) H-不変多項式とは T を変数とする多項式 $P(T)$ で全ての $h \in H$ に対して $P(h.T) = \sigma_{w,w}(h)P(T)$ を満たすものである.

この問題は s の値に応じて状況が変わり, 問題 1 (解決済み), 問題 2 (一般には未解決) に部分的に帰着される.

Case 1 $s \notin \mathbf{Z}_+$. この場合は問題 1 のカテゴリーに入る. H の $\mathcal{H}(s)$ への作用を指標 $\sigma_{p,q}$ を用いて変形すれば $P(T)$ はテンソル T への G-作用に関する H-不変多項式とみなすことができる. $P(T)$ は G-不変でもあることが示され, 結果として H-不変多項式はワイル多項式,

$$\mathrm{contr}\left(T^{(p_1,q_1)} \otimes \cdots \otimes T^{(p_k,q_k)}\right), \quad T^{(p,q)} = (T_{\alpha\overline{\beta}})_{|\alpha|=p,|\beta|=q},$$

の形の Q に関する完全縮約の一次結合, であることがわかる [12].

Case 2 $s \in \mathbf{Z}_+$. この場合 $\mathcal{H}(s)$ は直和分解 $\mathcal{H}(s) = \mathcal{H}_s \oplus \mathcal{H}^s$,

$$\mathcal{H}_s = \{T : T^{(p,q)} = 0 \text{ if } \min(p,q) \le s\}, \quad \mathcal{H}^s = \{T : T^{(p,q)} = 0 \text{ if } p, q > s\},$$

を持つ. そこで各々の空間上の H-不変多項式を考えることにする. これらは問題 2 のカテゴリーに入る. 実際 $\mathcal{H}_s$ 上の H-不変多項式は十分大きな p, q に対する $\mathcal{H}_s^{(p,q)} = \{T^{(p,q)} : T \in \mathcal{H}_s\}$ 上の H-不変多項式として表すことができ, また $\mathcal{H}_s^{(p,q)} \otimes \sigma_{s-p,s-q}$ は $\mathbf{C}^{n+1}$ 上のタイプ (p,q) の共変テンソル空間の G-不変ではない H-部分加群になる. $\mathcal{H}^s$ についても, 少し複雑になるが, 類似の主張が成り立つ [12].

Fact 2a $\mathcal{H}_s$ の H-不変多項式は全てワイル多項式で与えられる [16], [3]. とくに $s = 1$ の場合が双正則不変量の記述に必要な結果である. $\mathcal{H}_1$ はジーゲル領域 Ω_0 の摂動を考えたときのアンビエント計量の曲率テンソル $(R^{(p,q)}(e_0))_{p,q \ge 2}$ の一次変分全体のなす空間である. [3] の証明では, 高いウェイトについては $\mathcal{H}_s$ の $(\mathfrak{g}, H)$-加群としての構造が, 低いウェイトについては H の部分群 $U(n-1)$ についてのワイルの理論が用いられる. とくに後者の議論では $\mathcal{H}_s$ を定義する方程式の具体的な形が用いられ技巧的である. この証明については Bailey による明快な解説 [1] がある.

Fact 2b $\mathcal{H}^s$ 上ではワイル多項式で表せない H-不変多項式が存在する [12]. 一般の H-不変多項式をどのように与えればよいのかは分かっていない.

注意 3.2 上と同様な結果が $G = O(n,1)$, $SL(n)$ の場合にも得られている [3], [13], [18]. 前者は共形構造, 後者が射影構造の不変量と関係している.

4 Moser の標準座標

次に漸近展開の記述に必要な局所幾何の道具を説明する. 熱核の場合には, 漸近展開の係数 γ_k は標準座標 $x = (x_1, \dots, x_n)$ の中心では x に関する g の成分の偏微分 (テーラー係数) $(g_{ij,ab\dots c}(0))$ を変数とする多項式 $P_k(g_{ij,ab\dots c})$ で与えられる. この多項式は標準座標の変換 $O(n)$ に関する不変多項式になり γ_k の決定には不変式論が応用できる. この議論の類似により CR 不変量が H-不変多項式として定義される. 基本概念の対応は以下の通りである.

	リーマン多様体:	強擬凸領域:
基本的な例:	ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n = E(n)/O(n)$	ジーゲル領域 $\Omega_0 = SU(1,n)/H$,
解析的問題:	$\Delta u = f$	$\overline{\partial} u = \alpha$, $\overline{\partial}_b u = \alpha$
幾何的概念:	測地線, レビ・チビタ接続, 標準座標	チェイン, Cartan-田中-Chern 接続, Moser の標準座標

まず Moser の標準座標について説明する．一般の強擬凸超曲面 M は各点においてジーゲル領域の境界 $\partial\Omega_0$ の局所双正則像で二次まで近似することができる (これは強擬凸性の定義と同値である). Moser [35] (cf. [8]) は実解析的な強擬凸超曲面 M を $\partial\Omega_0$ に最も近付ける局所座標を与えた．この座標は **Moser の標準座標**と呼ばれる．各点 $p \in M$ に対して p を中心とする Moser の標準座標 $z = (z', z_n) \in \mathbf{C}^n$ をとれば M は

$$2\,\mathrm{Re}\, z_n - |z'|^2 - \sum_{|\alpha|,|\beta|\geq 2,\, l\geq 0} A^l_{\alpha\overline{\beta}}\, z'_\alpha \overline{z}'_\beta (\mathrm{Im}\, z_n)^l = 0 \tag{4.1}$$

で与えられる ($z'_\alpha = z_{\alpha_1}\cdots z_{\alpha_p}$ は z' の単項式であり, $|\alpha| = p$ は非可換記法での多重添字 $\alpha = \alpha_1 \ldots \alpha_p$ の長さである). ここでテーラー係数 $(A^l_{\alpha\overline{\beta}})$ はいくつかの線形な正規化条件を満たす (これは測地線に対応する概念であるチェインの方程式から導かれる). $A = (A^l_{\alpha\overline{\beta}})$ を (M, p) の **Moser の係数**, (4.1) で与えられる曲面 (の芽) $N(A)$ を **Moser の標準形**と呼ぶ.

リーマン幾何での標準座標の場合と同様に, Moser の標準座標もモデル領域でのイソトロピー群 H の作用だけの任意性がある．この H の作用による座標変換で Moser の係数全体のなす空間への H-作用を決めると, その軌道が曲面 $N(A)$ の双正則同値類を与える．この作用は M 上の H-主バンドルを用いて表すこともできる. E. Cartan, 田中 [36], [37], Chern (cf. [8]) により M の高次のコフレーム・バンドルとして定義される H-主バンドルは標準的な Cartan 接続を持つことが示されている．この接続の曲率と Moser の係数 A が一対一に対応し, フレームの選び方が標準座標の選び方に対応する.

標準座標 (あるいはフレーム) の選び方によらない曲面の不変量を取り出すには A の関数 $P(A)$ で H-作用で不変なものを考えればよい．ここではとくに $P(A)$ が A の多項式であるものに制限し, 次のような定義をする.

定義 4.1 Moser の係数 $A = (A^l_{\alpha\overline{\beta}})$ を変数とする多項式 $P(A)$ が**ウェイト w の CR 不変量**であるとは, 任意の双正則写像 Φ で曲面 $N(A)$ を曲面 $N(\widetilde{A})$ に移すものに対して

$$P(\widetilde{A}) = |\det \Phi'(0)|^{-2w/(n+1)} P(A)$$

が成り立つときをいう.

標準座標の変換 Φ はイソトロピー群 H によりパラメータ付けが可能である．このとき $\det \Phi'(0)$ は H の指標を与え, $P(A)$ は H-不変多項式とみなせる (モデル問題 1 参照). よってこの定義は前節の問題 3 の設定に属し, これに基づいて CR 不変量を計算するのは困難である (A への H-作用は非線形なのでさらに技術的な難しさもある [21], [30]).

Moser の係数の代わりに Cartan 接続の曲率を用いて CR 不変量を定義することもできる．しかしベルグマン核への応用を考えるときには不変量の領域内部への拡

張が重要な問題となるため, ここでは上記のような埋め込みを用いた素朴な定義を採用する.

注意 4.2 現在, 倉西 [32] により Cartan 接続を用いた CR 多様体の $\mathbf{C}^n$ への局所的な埋め込みの研究が進められている. こういう埋め込みが構成できれば, それを用いて Cartan 接続から領域内部の不変量も構成できるはずで, そのベルグマン核への応用も期待できる.

5 アンビエント計量を用いた CR 不変量の構成

CR 不変量を決定する問題は, 低いウェイトについては §2 で与えたアンビエント計量と §3 で説明した放物型不変式論を用いて解決することができる. 副産物としてベルグマン核の展開 (2.3) が得られる (注意 5.2). 本節ではアンビエント計量からウェイト n 以下の全ての CR 不変量が構成される仕組みを説明する.

アンビエント計量は $\mathbf{C}^* \times \overline{\Omega}$ 上のローレンツ・ケーラー計量 $g[r]$, ここで r は Fefferman の定義関数, として定義された. (実際には r は mod $O^{n+2}(\partial\Omega)$ でしか定義されないため $g[r]$ は $\mathbf{C}^* \times \partial\Omega$ に沿っての有限次のジェットとしての意味しか持たない. ここではしばらくこの点を忘れて不変量が得られる仕組みを説明する.)

ジーゲル領域 Ω_0 の場合から始める. $r_0 = z_n + \overline{z}_n - |z'|^2$ は Fefferman の定義関数である. $\mathbf{C}^* \times \Omega_0$ 上の座標 $\zeta_0 = z_0, \zeta_1 = z_0 z_1, \ldots, \zeta_n = z_0 z_n$ を用いるとアンビエント計量 $g_0 = g[r_0]$ は

$$g_0 = d\zeta_0 d\overline{\zeta}_n + d\zeta_n d\overline{\zeta}_0 - d\zeta' \cdot d\overline{\zeta'}$$

と表される. これは §3 で用いた二次形式 $Q(\zeta, \overline{\zeta})$ と対応する. また自己同型 $\Phi \in \mathrm{Aut}(\Omega_0)$ は

$$\Phi_{\#}(z_0, z) = \Big(z_0 \cdot (\det \Phi'(z))^{-1/(n+1)}, \Phi(z)\Big) \tag{5.1}$$

により $\mathbf{C}^* \times \Omega_0$ 上の等長変換にリフトすることができ, これは ζ 座標に関する線形変換 $h \in SU(1,n)$ になる. ここで分数冪の分枝は $SU(1,n)$ の中心 $\mathbf{Z}_{n+1}$ に対応し, $\mathrm{Aut}(\Omega_0) = SU(1,n)/\mathbf{Z}_{n+1}$ を反映している.

一般の双正則写像 $\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ に対しても (5.1) で定義されるバンドル写像 $\Phi_{\#} : \mathbf{C}^* \times \Omega_1 \to \mathbf{C}^* \times \Omega_2$ はアンビエント計量に関する等長写像になる. よって $g[r]$ の不変量は双正則不変量を与える. さらにワイル多項式 $W_{\#}[r](z_0, z) = |z_0|^{-2w} W[r](z)$ のように z_0 に関して斉次である場合には $W_{\#}$ の不変性は W のウェイトをもった変換則

$$W_{\Omega_2} \circ \Phi = |\det \Phi'|^{-2w/(n+1)} W_{\Omega_1} \tag{5.2}$$

を導く. このようにしてウェイトをもった双正則不変量が構成される. とくに Moser の標準形になっている曲面 $N(A)$ でのワイル多項式の原点での値 $W[r](0)$ は, ウェ

イトが n 以下の場合 (補題 2.2 参照), A の多項式であり CR 不変量を与えることがわかる.

定理 5.1([16], [3]) 全てのウェイト n 以下の CR 不変量はワイル多項式で与えられる.

注意 5.2 ベルグマン核の展開 (定理 2.1) は定理 5.1 を用いて次のように帰納的に構成される. $W_0, \dots, W_{k-1}$ が与えられたとき $\varphi_k \in C^\infty(\overline{\Omega})$ を $\varphi^{\mathrm{B}} = \sum_{j=0}^{k-1} W_j[r]\, r^j + \varphi_k r^k$ で定義する. $\partial\Omega$ が局所的に Moser の標準形 $N(A)$ になっている場合には $\varphi_k(0)$ は A の多項式で与えられ (定理 1.1 参照) CR 不変量になることがわかる. よって定理 5.1 により $\varphi_k(0) = W_k[r](0)$ を満たすウェイト k のワイル多項式を選ぶことができる. φ_k および W_k が共にウェイト k の変換則を満たすことに注意すれば, 全ての境界点 p で $\varphi_k(p) = W_k[r](p)$, すなわち $\varphi_k = W_k[r] + O(\partial\Omega)$ であることが導かれ, 結果として $\varphi^{\mathrm{B}} = \sum_{j=0}^{k} W_j[r]\, r^j + O^{k+1}(\partial\Omega)$ が得られる.

以下では定理 5.1 の証明方法を線形モデルを用いて説明する. このモデルでは Moser の係数 A への H の作用に含まれる A に関する非線形項および A に課せられる正規化条件を忘れて問題を単純化する. この単純化の後でもアンビエント計量の構成に現れる主要な問題は変わらない.

§3 で考えた関数のジェットの空間 $\mathcal{E}(s)$ を二次曲面 $\mathcal{Q} = \{\zeta \in \mathbf{C}^{n+1} : Q(\zeta, \overline{\zeta}) = 0\}$ に制限して H-加群 $\mathcal{J}(s) = \{f|_{\mathcal{Q}} : f \in \mathcal{E}(s)\}$ を定義する. $\mathcal{Q}$ の座標として $(z_0, z', v) = (\zeta_0, \zeta'/\zeta_0, \mathrm{Im}(\zeta_n/\zeta_0))$ をとれば $f \in \mathcal{J}(s)$ は

$$f = |z_0|^{2s} \sum_{|\alpha|, |\beta|, l \geq 0} A^l_{\alpha\overline{\beta}}\, z'_\alpha \overline{z}'_\beta\, v^l \tag{5.3}$$

という展開をもつ. f とテーラー係数のリスト $A = (A^l_{\alpha\overline{\beta}})$ を同一視すれば A への H の作用 $(h, A) \mapsto h.A$ が得られる. とくに $s = 1$ のとき, この作用は Moser の係数 A への H の作用の A に関する線形項と, A に課せられる正規化条件に関係する線形補正項を除いて, 一致する (注意 5.3 参照). そこで CR 不変量の構成問題のモデルとして次を考える.

モデル問題 2 $\mathcal{J}(s)$ 上の H-不変多項式を決定せよ.

注意 5.3 正確には Moser の係数 A への H-作用は H-加群 $\mathcal{J}(1)$ と次のような関係にある. Moser の係数全体のなすベクトル空間 $\mathcal{N}$ を (5.3) により $\mathcal{J}(1)$ の部分ベクトル空間とみなせば, ベクトル空間としての直和分解 $\mathcal{J}(1) = \mathcal{N} \oplus \mathcal{J}^1$ が得られる. ここで $\mathcal{J}^1 = \{\varphi|_{\mathcal{Q}} : \varphi \in \mathcal{H}^1\}$ は $\mathcal{J}(1)$ の H-部分加群である. このとき $\mathcal{N}$ への H -作用の $A = 0$ での線形化 (すなわち接空間 $T_0\mathcal{N}$ への H-作用) は商 H-加群 $\mathcal{J}(1)/\mathcal{J}^1$ と同型になる.

この問題も s に応じて状況が変わる. 簡単なのは $n + 2s \notin \mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$ の場合

である．このとき $\mathcal{Q}$ への制限写像

$$\mathcal{H}(s) \to \mathcal{J}(s) \tag{5.4}$$

は H-加群の同型を与え, モデル問題 2 は §3 のモデル問題 1 (Case 1) に帰着される．この同型は $\mathcal{Q}$ 上の関数の $\mathbf{C}^{n+1}$ への調和関数としての拡張が (形式的冪級数として) 一意的に存在することを主張している．二階の微分方程式 $\Delta\varphi = 0$ の初期値問題の解が一意になるのは $\varphi(\zeta)$ の ζ についての斉次性を仮定しているからである．

$m = n+2s \in \mathbf{N}$ のときは (5.4) は全射でも単射でもない．しかし調和拡張を近似的に ($\Delta\varphi = O(Q^{m-1})$ を満たすように) 構成することはできる．(とくに $s = 1$ の場合 $\Delta\varphi = O(Q^{n+1})$ は Fefferman の定義関数の満たす近似方程式 $J[r] = 1 + O^{n+1}(\partial\Omega)$ の r_0 での線形化になっている.) よって (5.4) は低次のジェットだけを見れば H-同変な全単射になっている．この全単射により, ウェイト $n+2s-2$ 以下の H-不変多項式に限れば, モデル問題 2 をモデル問題 1 (Case 2) に帰着することができる．

この $\mathcal{J}(s)$ での議論を Moser の係数全体のなすベクトル空間 $\mathcal{N}$ (これは $\mathcal{J}(1)$ の部分空間になっている; 注意 5.3 参照) に制限すれば, 対応 (**??**) により H-不変多項式の決定は $\mathcal{H}_1$ 上の同様な問題に翻訳することができる．よって定理 5.1 は線形化の後 Fact 2a に帰着される．

6 アンビエント計量の精密化

この節では [26] で与えたアンビエント計量の精密化を説明する．この精密化により, これまで述べてきた定理に含まれていたウェイトに関する制限を取り除くことができる．

まずその基礎となる複素モンジュ・アンペール方程式を詳しく見てみよう．複素モンジュ・アンペール方程式の境界値問題

$$J[u] = 1 \ \text{ and } \ u > 0 \ \text{ in } \ \Omega; \qquad u = 0 \ \text{ on } \ \partial\Omega \tag{6.1}$$

の解の一意存在は Cheng-Yau [7] によって示されている．この解 u^{MA} は境界で弱い特異性をもち, 次の漸近展開を許す [33]:

$$u^{\mathrm{MA}} \sim r \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k \cdot (r^{n+1} \log r)^k \tag{6.2}$$

ここで r は Feffeman の定義関数, $\eta_k \in C^\infty(\overline{\Omega})$ である．この展開の中には大域的に決まる部分と局所化可能な部分が混ざっている．詳しくは, 方程式 $J[u] = 1$ の上式右辺のような形式解が一つの境界上の関数 $a \in C^\infty(\partial\Omega)$ の選び方を除いて一意に決定される [22]．このパラメータ a のみが大域的に決定され, a を指定すれば形式解が

境界点の近傍で局所的に構成される．形式解を用いた不変量の構成方法としては次の二つが考えられる:

A) 形式解からパラメータ a に依存しない部分だけを取り出し, 不変量の構成に利用する．

Graham は $\eta_k \bmod O^{n+1}(\partial\Omega)$ は a に依らないことを示し, η_k を含むワイル多項式を定義した [21], [22]. この一般化により定理 5.1 を改良することできるが, ウェイトに関する制限を完全に取り除くことはできない ([30] 参照).

B) バラメータ a に依存するアンビエント計量を定義し a を含むワイル多項式を考える．

この枠組みでワイル多項式を用いればベルグマン核の不変な無限展開を得ることができる．また定理 5.1 についても, 主張は弱まるが, ウェイトに関する制限を取り除くことができる (定理 6.2). 以下ではこの方法について説明する．

定義関数の変換則を念頭において形式解を $\mathbf{C}^*$-バンドル上で構成することにする．$\mathbf{C}^* \times \Omega$ の ζ 座標を用いてバンドル上の複素モンジュ・アンペール作用素を

$$J_\#[U] = (-1)^n \det \left(\partial^2 U/\partial\zeta_j \partial\overline{\zeta}_k\right)_{j,k=0,\dots,n}$$

と定義し, 方程式 $J_\#[U]=1$ の次のような形式的級数解を考える:

$$U = r_\# + r_\# \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k (r^{n+1}\log r_\#)^k, \quad \eta_k \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

ここで $r \in C^\infty(\overline{\Omega})$ は Ω の定義関数, $r_\# = |z_0|^2 r$ はその $\mathbf{C}^* \times \overline{\Omega}$ へのリフトである．形式解 U の滑らかな部分 $r = r[U]$ として現れる定義関数を集め

$$\mathcal{F}_{\partial\Omega} = \{r[U] : U \text{ は } \mathbf{C}^* \times \partial\Omega \text{ に沿った形式的級数解}\}$$

とおく．この定義関数族は次の意味でウエイト -1 の変換則を満たす．双正則写像 Φ に対して各定義関数のウェイト -1 の引き戻し $\Phi^*(r) := |\det \Phi'|^{-2/(n+1)} r \circ \Phi$ を考える．このとき $\mathcal{F}_{\partial\Omega_2}$ に属する定義関数の引き戻し全体が $\mathcal{F}_{\partial\Omega_1}$ を与える, すなわち $\Phi^*(\mathcal{F}_{\partial\Omega_2}) = \mathcal{F}_{\partial\Omega_1}$ が成り立つ．形式解 U の定義において $\log r_\#$ の形の対数項を導入したのはこの不変性を導くための工夫である．

この定義関数族を用いると定理 2.1 を次のように改良することができる．

定理 6.1 ([26]) ウェイト k のワイル多項式 W_k $(k = 0, 1, 2, \dots)$ が存在し, 任意の強擬凸領域 Ω および任意の $r \in \mathcal{F}_{\partial\Omega}$ に対して漸近展開

$$K_\Omega \sim r^{-n-1} \sum_{k=0}^{n} W_k[r]\, r^k + r^{-n-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} W_k[r]\, r^k \log r \tag{6.3}$$

が成り立つ．

とくに $n=2$ の場合, 対数項の係数 ψ^{B} の展開の最初の 3 項は

$$\psi^{\mathrm{B}} = c_1\,\Delta^2 S + c_2\|R^{(2,4)}\|^2\,r + (c_3\|R^{(2,5)}\|^2 + c_4\|R^{(3,4)}\|^2)r^2 + O^3(\partial\Omega) \tag{6.4}$$

で与えられる．ここで S および Δ は $g[r]$ のスカラー曲率およびラプラシアン, $\|R^{(p,q)}\|^2$ は $\mathrm{contr}(R^{(p,q)} \otimes R^{(p,q)})$ の形の完全縮約である．

展開 (6.3) の最初の $n+1$ 項は定理 2.1 で与えられたものと一致する．実際, 各 $r \in \mathcal{F}_{\partial\Omega}$ は Fefferman の定義関数である (すなわち $J[r] = 1 + O^{n+1}(\partial\Omega)$ を満たす). よってとくに係数の境界値 $W_k[r]|_{\partial\Omega}$, $k \le n$, は CR 不変量になる．より高次の項については, 一般の $W_k[r]|_{\partial\Omega}$ は r に依存し CR 不変量を与えるとは限らない．しかし級数 (**??**) 全体としては各 $W_k[r]$ の r への依存が相殺されて領域だけによって決まる漸近級数を与えている．正確には, 任意の $m \ge n+1$ に対して $\sum_{k=n+1}^{m} W_k[r]\,r^k \mod O^{m+1}(\partial\Omega)$ は $r \in \mathcal{F}_{\partial\Omega}$ に依存しない.

ワイル多項式 $W[r]$ の定義関数 r への依存性をさらに詳しく記述しよう．形式解 U は境界上での一つの関数の与え方を除いて一意的に構成される．よって $\mathcal{F}_{\partial\Omega}$ も同様にパラメータ付けされる．このパラメータを $a \in C^\infty(\partial\Omega)$, 対応する定義関数を $r_a \in \mathcal{F}_{\partial\Omega}$ と書く．とくに境界が局所的に Moser の標準形 $N(A)$ になっている場合を考え, 各 $r_a \in \mathcal{F}_{N(A)}$ に対する $W[r_a]$ の原点での値に注目する．この値は A および a の原点のテーラー展開の係数に依存して決まる．そこで $P_W(A,a) = W[r_a](0)$ と書く．とくに $P_W(A,a)$ がパラメータ a に依存しないとき W を a-**独立ワイル多項式**と呼ぶことにする.

定理 6.2 ([26]) a-独立ワイル多項式 W に対して $P(A) = P_W(A,a)$ は CR 不変量であり, 逆に全ての CR 不変量はこのようにして与えられる.

これは定理 5.1 からウェイトの制限を取り除いたものである．ウェイト $n+2$ 以下のワイル多項式は a-独立であることが示される．よって定理 5.1 では a-独立ワイル多項式だけを考えていたと言うこともできる．今のところ, 与えられたワイル多項式の a-独立性を調べる有効な判定条件は知られていない．よって, 残念ながら, 定理 6.2 が CR 不変量の完全な構成法を与えているとは言えない.

注意 6.3 現在 R. Gover と筆者により a-独立ワイル多項式を全て生成するアルゴリズムの研究が進められている [20]. これは共形不変量の構成に用いられた Gover [19] の手法 (§8 参照) の CR 幾何への応用である.

以下では定理 6.1 および 6.2 のような一般化が可能になる仕組みを前節で導入した線形モデル $\mathcal{J}(1)$ を用いて説明する．まずジーゲル領域 Ω_0 の摂動に関する形式解の一次変分を考える．この変分は前節で考えた変分と同じように g_0 に関するラプラス方程式を満たす．ここでの新しい点は一次変分が対数項をもつということである．対数項を許すラプラス方程式の解空間は次のような構造をもつ.

命題 6.4 任意の $f \in \mathcal{J}(1)$ に対して $(\varphi, \eta) \in \mathcal{E}(1) \oplus \mathcal{E}(-n-1)$ で

$$\Delta(\varphi + \eta\, Q^{n+2} \log Q) = 0, \qquad \varphi|_{\mathcal{Q}} = f$$

を満たすものが存在する．$(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\eta})$ を同じ条件を満たすものとするとき, ある $\psi \in \mathcal{H}(-n-1)$ に対して, $(\varphi, \eta) - (\widetilde{\varphi}, \widetilde{\eta}) = (Q^{n+2}\psi, 0)$ が成り立つ (この ψ が解の任意性を表している).

解空間 $\Big\{(\varphi, \eta) \in \mathcal{E}(1) \oplus \mathcal{E}(-n-1) : \Delta(\varphi + \eta\, Q^{n+2} \log Q) = 0\Big\}$ の $\mathcal{E}(1)$ 成分への射影を $\widetilde{\mathcal{H}}(1)$ とおく (これは U から定義関数 r を取り出す操作に対応し, $\widetilde{\mathcal{H}}(1)$ は r の r_0 での一次変分全体のなす空間と一致する)．このとき命題 6.4 は次のような H-加群の完全系列として表すことができる:

$$0 \to \mathcal{H}(-n-1) \to \widetilde{\mathcal{H}}(1) \to \mathcal{J}(1) \to 0 \tag{6.5}$$

これは (5.4) の定義域を拡張し, 完全系列に延長したものである．

$\mathcal{J}(1)$ 上の H-不変多項式は (6.5) を用いて $\widetilde{\mathcal{H}}(1)$ 上の H- 不変多項式に引き戻すことができる．よって各々の加群上の H-不変多項式全体のなす空間を $I(\widetilde{\mathcal{H}}(1))$ および $I(\mathcal{J}(1))$ とおけば $I(\mathcal{J}(1)) \subset I(\widetilde{\mathcal{H}}(1))$ と見なせる．このようにより広い空間 $I(\widetilde{\mathcal{H}}(1))$ を導入することにより前節での議論に現れるウェイトに関する制限を回避することができる．

さらに (6.5) において $\mathcal{J}(1)$ を Moser 係数全体の空間 $\mathcal{N}$ に, $\widetilde{\mathcal{H}}(1)$ を

$$\widetilde{\mathcal{H}}_1 = \{T \in \widetilde{\mathcal{H}}(1) : T^{(p,q)} = 0 \text{ if } \min(p, q) \leq 1\}$$

に制限して短完全系列が作ることができる．この完全系列を利用すれば CR 不変量の決定を (H-作用の線形化のプロセスをへて) $\widetilde{\mathcal{H}}_1$ 上の H-不変多項式の決定問題に帰着することができる．$\widetilde{\mathcal{H}}_1$ 上では, Fact 2a の一般化により, 全ての H-不変多項式はワイル多項式で与えられることが示される．定理 6.1 および 6.2 に現れるワイル多項式はこの議論を用いて与えられる．

7　ベルグマン核の漸近展開と指数定理

この論説で述べたベルグマン核の不変式論に関する結果はその最初の一歩にすぎない．微分形式に対して熱方程式を考えれば, 熱核の漸近展開と特性類の関係が導かれ, その結果, 様々な指数定理が得られる．ベルグマン核の不変式論も同じような広がりを持つ — と期待している．しかし, 今のところベルグマン核と指数定理の関係について知られている結果は少ない．以下ではこれからの研究の手がかりとなると思われる事実を紹介する．

時間変数と定義関数の対応に注目し, 領域の大域的不変量の構成を考える. 定義関数 ρ を一つ固定し $\epsilon > 0$ に対して $\Omega_\epsilon = \{\rho > \epsilon\}$ とおく. そのベルグマン体積要素 $K_\Omega |dz|^2$ に関する体積を $\mathrm{Vol}(\Omega_\epsilon)$ とする. $\mathrm{Vol}(\Omega_\epsilon)$ は $\epsilon \to 0$ のときには発散し漸近展開

$$\mathrm{Vol}(\Omega_\epsilon) \sim v_0 \epsilon^{-n} + v_1 \epsilon^{-n+1} + \cdots + v_{n-1}\epsilon^{-1} + v_n \log \epsilon + \cdots \tag{7.1}$$

をもつ. 例えば ρ として Fefferman の定義関数を選べば係数 v_j のいくつかは領域の双正則不変量を与える. とくに L をコンパクト複素多様体上の正の直線束, $\Omega \subset L^*$ をグラウエルト柱状領域とするとき, 漸近展開 (??) は L のヒルベルト多項式 $P(m) = \dim H^0(M, L^m)$ のラプラス変換であることがわかる [27] (この中ではセゲー核に関して結果を述べているが, これはベルグマン核にも翻訳できる). これは (7.1) と指数定理の関係を示唆している.

部分領域 Ω_ϵ での積分を用いた大域的不変量の構成は Burns-Epstein [6] においても考察されている. その中ではベルグマン核ではなく Cheng-Yau [7] によって構成された完備アインシュタイン・ケーラー計量 (およびその特性類) が用いられている. このとき展開の係数として領域のオイラー数, 境界の Burns-Epstein 不変量 (CR 多様体の Chern-Simons タイプの不変量) などが現れる.

より一般の完備アインシュタイン計量に対する (7.1) の形の展開は Anti- de Sitter/Conformal Field Theory 対応と呼ばれる物理学の枠組みで研究されており, これは次節で触れる共形幾何でのアンビエント計量と深く関係している. この話題については Graham [24] に数学者向けの解説がある.

8 共形幾何との関係

Fefferman のプログラムは CR 幾何の設定を超えて放物型不変式論, あるいは放物型幾何, として一般化されている [23], [11], [9]. その対象となるのは $G/H =$ (半単純群)/(放物型部分群) をモデルとする幾何構造である. この枠組みは 田中 [36], [37], [38], 森本 [34] による Cartan 接続の研究の流れと合流するものである. この節では CR 幾何と最も密接に関係する共形幾何の場合について粗く触れる.

CR 幾何と共形幾何との関係はアンビエント計量を用いて記述することができる. $\mathbf{C}^*$-バンドル上のアンビエント計量の $S^1 \times \partial\Omega$ への制限はその上の実ローレンツ計量を与える. この計量は Fefferman 計量と呼ばれる. Fefferman 計量は $\partial\Omega$ の $\mathbf{C}^n$ への埋め込みによって異なるが, その共形類は CR 構造だけから局所的に決定される [15]. Fefferman 計量の構成は抽象的な CR 構造に対して一般化することが可能であり, CR 構造に共形類を対応させる “写像” は単射であることもわかっている [5].

アンビエント計量の共形構造への一般化は Fefferman-Graham [17] で与えられている. 共形多様体 M に対して, その計量のクラスのなす S^2T^*M の中の $\mathbf{R}_+$ バンド

ルを $\widetilde{M}$ と置く．このときアンビエント計量は $\widetilde{M} \times (-\epsilon, \epsilon)$ 上の リッチ平坦なローレンツ計量として定義される．このアンビエント計量は M が奇数次元のときには $\widetilde{M} \times \{0\}$ に沿って形式的に一意に定まり, その計量に関するワイル多項式がすべての局所スカラー共形不変量を与える [3]. 偶数次元の場合には CR の場合と同様な障害が現れ, アンビエント計量には対数項が含まれる．この場合でも CR の場合と同様な理論展開が可能であると思われる．実際 Fefferman の共形構造に附随するアンビエント計量はこの論説で説明した $\mathbf{C}^* \times \overline{\Omega}$ 上のアンビエント計量と一致する．この場合 $\widetilde{M} = \mathbf{C}^* \times \partial\Omega$ が $M = S^1 \times \partial\Omega$ 上の $\mathbf{R}_+$-バンドルになっている．共形多様体でのアンビエント計量の大域的な構成は Graham-Lee [25] で行われている．これは強擬凸領域での Cheng-Yau の理論 [7] に対応するものである．

一方, 共形不変量を構成する方法として Bailey-Eastwood-Gover [2] は Tractor Calculus という計算方法を提案している．これは Cartan 接続をもつ主バンドルに附随するベクトル・バンドル上の接続を用いてワイル多項式を構成する方法である. Gover [19] は Tractor Calculus を用いて殆ど全ての (奇数次元の場合は全ての) スカラー共形不変量が ワイル多項式として与えられることを示している．この手法の特徴はウェイトが高い不変量（計量の高次の微分を含む不変量）の構成に有効であることである．これは, アンビエント計量構成法は障害が現れるまでのウェイトの低い不変量の構成に有効であることと対比でき, この二つの方法はお互いに補完するところがあると思われる．Tractor Calculus の CR 幾何への応用も進められている [20].

最後に, 数多くの有益なご意見, ご指摘を頂きました査読者に感謝いたします.

参考文献

[1] T. N. Bailey, Parabolic invariant theory and geometry, in “The Penrose Transform and Analytic Cohomology in Representation Theory”, Contemp. Math., 154, pp. 169–180, Amer. Math. Soc., 1993

[2] T. N. Bailey, M. G. Eastwood and A. R. Gover, Thomas's structure bundle for conformal, projective and related structures, Rocky Mountain J. Math. **24** (1994), 1191–1217

[3] T. N. Bailey, M. G. Eastwood and C. R. Graham, Invariant theory for conformal and CR geometry, Ann. of Math. **139** (1994), 491–552

[4] M. Beals, C. Fefferman and R. Grossman, Strictly pseudoconvex domains in $\mathbf{C}^n$, Bull. Amer. Math. Soc. **8** (1983), 125– 322

[5] D. Burns, K. Diederich and S. Shnider, Distinguished curves in strictly pseudoconvex boundaries, Duke Math. J. **44** (1977), 407–431
geometry, Manuscripta Math. **33** (1980), 1–26

[6] D. Burns and C. Epstein, Characteristic numbers of bounded domains, Acta Math. **164** (1990), 29–71

[7] S.-Y. Cheng and S.-T. Yau, On the existence of a complete Kähler metric on non-compact complex manifolds and the regularity of Fefferman's equation, Comm. Pure Appl. Math. **33** (1980), 507–544

[8] S. S. Chern and J. K. Moser, Real hypersurfaces in complex manifolds, Acta Math. **133** (1974), 219–271

[9] A. Čap and H. Schichl, Parabolic geometries and canonical Cartan connections, preprint 1997 (http://www.esi.ac.at/ preprint #450)

[10] K. Diederich, Some recent developments in the theory of the Bergman kernel function: A survey, in "Several complex variables," Proc.Sympos. Pure Math. **30,1**, pp. 127–137, Amer. Math. Soc., 1977

[11] M. G. Eastwood, Variations on the de Rham complex, Notices Amer. Math. Soc. **46** (1999), 1368–1376

[12] M. G. Eastwood and C. R. Graham, Invariants of CR densities, Proc. Sympos. Pure Math. **52, 2**, pp. 117–133, Amer. Math. Soc., 1991

[13] M. G. Eastwood and C. R. Graham, Invariants of conformal densities, Duke Math. J.**63** (1991), 633–671

[14] C. Fefferman, The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains, Invent. Math. **26** (1974), 1–65

[15] C. Fefferman, Monge-Ampère equations, the Bergman kernel, and geometry of pseudoconvex domains, Ann. of Math. **103** (1976), 395–416; Correction, ibid., **104** (1976), 393– 394

[16] C. Fefferman, Parabolic invariant theory in complex analysis, Adv. in Math. **31** (1979), 131–262

[17] C. Fefferman and C. R. Graham, Conformal invariants, in "Élie Cartan et les Mathématiques d'Aujourd'hui", Astérisque, hors série (1985), 95–116

[18] A. R. Gover, Invariants and calculus for projective geometries, Math. Ann. **306** (1996), 513–538.

[19] R. Gover, Invariant theory and calculus for conformal geometries, preprint

[20] R. Gover, Aspects of parabolic invariant theory, The 18th Winter School "Geometry and Physics" (Srni, 1998), Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. No. 59, (1999), 25–47

[21] C. R. Graham, Scalar boundary invariants and the Bergman kernel, in "Complex Analysis II", Lecture Notes in Math. **1276**, pp. 108–135, Springer, 1987

[22] C. R. Graham, Higher asymptotics of the complex Monge- Ampère equation, Compositio Math. **64** (1987), 133–155

[23] C. R. Graham, Invariant theory of parabolic geometries, in "Complex Geometry", Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **143**, pp. 53–66, Dekker, 1993

[24] C. R. Graham, Volume and Area Renormalizations for Conformally Compact Einstein Metrics, to appear in Proc. of 19th Winter School in Geometry and Physics, Srni, Czech Rep., Jan. 1999 (math.DG/9909042)

[25] C. R. Graham and J. M. Lee, Einstein metrics with prescribed conformal infinity on the ball, Adv. in Math. **87** (1991), 186-225

[26] K. Hirachi, Construction of boundary invariants and the logarithmic singularity of the Bergman kernel, Ann. of Math. **151** (2000), 151-191

[27] 平地健吾, Szegö kernel of Grauert tube in line bundle, 数理解析研究所講究録 「積分核の代数解析的研究」掲載予定

[28] K. Hirachi and G. Komatsu, Invariant theory of the Bergman kernel, in "CR- Geometry and Overdetermined Systems" Advanced Studies in Pure Math. **25**, pp. 167–220, Math. Soc. Japan, 1997.

[29] K. Hirachi, G. Komatsu and N. Nakazawa, Two methods of determining local invariants in the Szegö kernel, in "Complex Geometry" , Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **143**, pp. 77–96, Dekker, 1993

[30] K. Hirachi, G. Komatsu and N. Nakazawa, CR invariants of weight five in the Bergman kernel, Adv. in Math. **143** (1999), 185– 250.

[31] L. Hörmander, L^2 estimates and existence theorems for the $\overline{\partial}$ operator, Acta Math. **113** (1965), 89–152

[32] M. Kuranishi, Pdes associated to the CR embedding theorem, in "Analysis and geometry in several complex variables (Katata, 1997)", Trends in Math., pp. 129–157, Birkhäuser, 1999

[33] J. Lee and R. Melrose, Boundary behaviour of the complex Monge–Ampère equation, Acta Math. **148** (1982), 159–192

[34] T. Morimoto, Geometric structures on filtered manifolds, Hokkaido Math. J. **22** (1993) 263–347

[35] J. K. Moser, Holomorphic equivalence and normal forms of hypersurfaces, Proc. Sympos. Pure Math. **27, 2**, pp. 109–112, Amer. Math. Soc., 1975

[36] N. Tanaka, On the pseudo-conformal geometry of hypersurfaces of the space of n complex variables, J. Math. Soc. Japan **14** (1962), 397–429

[37] N. Tanaka, On non-degenerate real hypersurfaces, graded Lie algebras and Cartan connections, Japan. J. Math. **2** (1976), 131–190

[38] N. Tanaka, On the equivalence problems associated with simple graded Lie algebras, Hokkaido Math. J. **8** (1979), 23–84

(ひらち　けんご・東京大学大学院数理科学研究科)