Step7の解説

Step7は更に次の2段階に分けて証明される。

1) Thm LBd-α_d + Thm Bd vol d + Thm Ef Bir d + Thm Ef Lag d

$\Longrightarrow$ Thm A$_d$: $d \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, $\exists \alpha = \alpha(d, \varepsilon) > 0$ s.t.

(X, B): d-dim, ε-lc weak Fano pair,

$$\mathrm{lct}(|-(K_X+B)|_{\mathbb{R}}, X, B) \geq \alpha$$

↑ これは Thm LBd-α_d と比べて Xの有界が分かっていない状態で示せることがポイント

2) Thm A$_d$ $\Longrightarrow$ Thm BAB$_d$.
+ Thm BAB for special case + Thm Bd Comp + Thm Ef Bir d + Thm Bd vol d

② から説明する。
キーとなるのは、次の Prop である

Assume Thm Bd Comp$_d$ holds

Proposition: $d, m, n \in \mathbb{N}$, $v > 0$, $\{t_\ell\}$: 正値数列

$$\Longrightarrow \mathcal{P} = \left\{ X \;\middle|\; \begin{array}{l} \cdot\ X: \text{klt } \mathbb{Q}\text{-factorial weak Fano of dim } d \\ \cdot\ K_X \text{ has } m\text{-complement} \\ \cdot\ |-mK_X| \text{ gives birat. map} \\ \cdot\ \mathrm{vol}(-K_X) < v \end{array} \quad \begin{array}{l} \cdot\ \forall \ell \in \mathbb{N} \\ \forall L \in |-\ell K_X|, \\ (X, t_\ell L): \text{klt} \end{array} \right\}$$

is bounded.

Date

まず Fano 型は Fano の場合に帰着される. Taking $\mathbb{Q}$-factorization, we may assume X is $\mathbb{Q}$-fact.

(ここでも Thm BAB for special case につながる)

(X, Δ): ε-klt Fano pair

$(-K_X)$-MMP: $X \dashrightarrow X'$ より　$-K_{X'}$: nef & big & ε-lc.

$\exists H \sim (-K_{X'} - \Delta)$ general s.t. $(X, \Delta + H)$

これが正しい ε-lc の MMP は Crepant につながっていく.

今 $\{X'\}$ が Bdd と仮定する

この時. $-K_{X'}$ の Cartier index は一様にとれる.

よって effective base free Thm より

$\exists m = m(d, \varepsilon)$ s.t. $-mK_{X'}$ は Cartier. base point free

$\mathbb{N}$　　$\supseteq H$ gen

(Rem! v.a. にもとれるが ここでは bpf で十分)

$\rightsquigarrow$ $(X', \frac{1}{m}H')$: klt by CT.

$\rightsquigarrow$ $\exists H \sim_{\mathbb{Z}} -mK_X$ s.t. $(X, \frac{1}{m}H)$: klt.

By the negativity

$\rightsquigarrow$ $\{X\}$ Bdd

Thm BAB for special

よって $\{X'\}$ の有界性を示せばよいが、ここで前 Prop を用いる.

最後の "$\forall l \in \mathbb{N}$, $\forall L \in |-lK_X|$, $(X', t_l L)$: klt" という t_l を

みつける ∴ 以外は仮定されている定理から n, m, η はみつけられる.

したがってこの条件を示す. しかしこれで Thm A が従う.

実際、 $t_l := \dfrac{t}{2l}$ とするとこの条件をみたす.

§§ Proposition 1の証明

Step 1 $|-mK_X|$ gives a birat. map と $\mathrm{vol}(-K_X) < v$
の条件より次のような log bounded family $(\overline{W}, \Sigma_{\overline{W}}) \in \mathcal{P}$ が構成できる.
$M \in |-mK_X|$ general を fix おく.

- $\exists$ birat'l map $\varphi: \overline{W} \dashrightarrow X$ & $(\overline{W}, \Sigma_{\overline{W}})$: log smooth
- $\mathrm{Supp}\,\Sigma_{\overline{W}} \supseteq \forall \varphi$-excep. div. & $\varphi_*^{-1}(\mathrm{Supp}\,M.)$
- $\exists W$ ← Not yet bdd.

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\phi"] & \\ \underset{\text{bdd}}{\overline{W}} \arrow[rr, dashed, "\varphi"'] & & \underset{\text{Not yet bdd}}{X} \end{tikzcd}$$

can by resolut.

s.t. $\phi^* M = \underbrace{A_W}_{\text{BPf movable part}} + \underbrace{R_W}_{\text{fixed part}}$

☺ 実際の構成は W を先につくり、 $\mathrm{vol}(A_W) < v' \,(= v \cdot m^d)$ より $|A_W|$ で定まる birat. morphism の Stein factorization の行き先は bounded となる.

したがってこの family に対する bounded resolution を取る.

したがって問題は $\Sigma_{\overline{W}}$ の構成とその有界性となる.

まず W 上で $\Sigma_W . A_W^{d-1} < bdd$ となる Σ_W をつくり

$\Sigma_{\overline{W}} := g_* \Sigma_W$ とすればよい.

一方 $\Sigma_W . A_W^{d-1} < bdd$ となるのは次の Lemma から $\mathrm{Val}(K + \Sigma + 2(2d+1)$

を上からおさえればいい

<u>Lem</u> X : d-dim normal proj. var.
M : bpf Cartier s.t. $\phi_{|M|}$: birational map

$H := 2(2d+1)M$
$D = \sum D_i$, D_i : prime divs & $D_i \neq D_j$ $(i \neq j)$

$\Rightarrow D . H^{d-1} \leq 2^d \mathrm{Val}(K_X + D + H)$

☺ アドバンストなレポート問題(題) Use MMP & Reid-Fukuda type vanishing & Riemann-Roch ...

実際 $\Sigma = \mathrm{Exc}(\phi) + \mathrm{Supp}\,\phi^* M + H$ これは NOT $\phi^*(f_* A_W)$

ここで H は $H \in |6d\, A_W|$ genl とする.

X上のpush

M: ℤ-div ⊇ Supp

$\longrightarrow \mathrm{Val}(K_W + \Sigma) \leq \mathrm{Val}(K_X + \Sigma_X) \leq \mathrm{Val}(K_X + M + 6d$

$\leq \mathrm{Val}((6d + m - 1)K$

by Def

$= (6d + m - 1)^d v$.

となる

(一般 ϕ : bir.
$\mathrm{Val}(D) \leq \mathrm{Val}(\phi_* D)$)

$$\overset{\overset{3dA_w}{\wedge|}}{}$$

∴ 今 $K_w + \frac{1}{2}\Sigma_w$: big ← cone thm よりしたがう

$$\mathrm{vol}(K_w + \Sigma_w + 2(2d+1)A_w) \leq \mathrm{vol}\left(K_w + \Sigma_w + g\cdot\frac{1}{2}\Sigma_w\right)$$

ここで $g = \dfrac{4(2d+1)}{3d}$

$$\leq \mathrm{vol}\left(K_w + \Sigma_w + g\left(K_w + \frac{1}{2}\Sigma_w\right)\right)$$

$K_w + \frac{1}{2}\Sigma_w$: big より

$$\leq \mathrm{vol}((1+g)(K_w + \Sigma_w)) < b_d$$

↑全 n に

A)

となりしたがう.

Step2 今、K_X が m-complement を持つことから M は general にとったので

$K_X + \frac{1}{m}M$ は lc となり, もし klt なら Thm BAB for special

がつかえるので $(X, \frac{1}{m}M)$ は NOT klt として.

新しく $\mathbb{Q}$-Complement Θ on X s.t. (X, Θ) : klt をつくり直す.

M) 実際 $B^+ := \frac{1}{m}M = \frac{1}{m}A + \frac{1}{m}R$ は K_X の m-complement.

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\phi"] & \\ \bar{W} \arrow[rr, dashed, "\phi"'] & & X \end{tikzcd}$$

の図式を思い出して.

(x) $\underbrace{K_{\bar{W}} + B^+_{\bar{W}}}_{\text{sub lc}} := \alpha_* \phi^* (K_X + B^+)$ と $B^+_{\bar{W}}$ を定める.

$B^+_{\bar W} \geq 0$

今、構成より $\mathrm{Supp}\, B^+_{\bar{W}} \subseteq \mathrm{Supp}\, \Sigma_{\bar{W}}$ となっている.

さらに今 $\underset{\underset{0}{\vee|}}{G_{\bar{W}}} \sim_{\mathbb{Q}} \underline{lA_{\bar{W}}}$ s.t. $\mathrm{Supp}\, G_{\bar{W}} \supseteq \mathrm{Supp}\, \Sigma_{\bar{W}}$ となる $G_{\bar{W}}$ ← big がある l を考える.

$G := \underbrace{\ell d^* G_{\bar{W}}}_{\ell A_{\bar{W}}} \to G \sim \ell A$ より

$G + \ell R \in |-\ell m K_X|$ となる.

よって仮定より ある $t_{\ell m} = : t$ で $(X, t(G+\ell R))$: klt

となる t が ℓ と m に依存しなくて uniform にとれる.

今 t を へらす分には問題ないが $t \in \mathbb{Q}$ かつ $t < \frac{1}{\ell m}$ と仮定しておく.

Note $t(G+\ell R) \subseteq t\mathbb{Z}$ より $t(G+\ell R)$ は t に依存した有限集合の範囲をうごく.

Thm Bdd of Comp d より $\exists \Omega \geq t(G+\ell R)$ $\exists n = n(d,t) \in \mathbb{N}$

s.t. $\cdot\ n(K_X + \Omega) \sim 0$

$\cdot\ (X, \Omega)$: lc.

今. $\Delta_{\bar{W}} := B^+_{\bar{W}} + \frac{t}{m} A_{\bar{W}} - \frac{t}{\ell m} G_{\bar{W}}$ とすると.

$K_{\bar{W}} + \Delta_{\bar{W}} \sim_{\mathbb{Q}} 0$ となるのは $\ell A_{\bar{W}} \sim G_{\bar{W}}$ かつ $-K_{\bar{W}} \sim_{\mathbb{Q}} B^+_{\bar{W}}$ より すぐわかる.

Claim $(\bar{W}, \Delta_{\bar{W}})$ は ε-sub lc for some $\varepsilon = \varepsilon(t, d, m)$

(∵) $B^+_{\bar{W}}$ は m-complement なので 係数が 1 以外は $\frac{m-1}{m}$ 以下

また $A_{\bar{W}} \not\subseteq \lfloor B^+_{\bar{W}} \rfloor$ よって $m \geq 2 \Rightarrow B^+_{\bar{W}} + \frac{t}{m} A_{\bar{W}}$

$B^+_{\bar{W}}$ の $A_{\bar{W}}$ の係数は $\frac{1}{m}$ 　の $A_{\bar{W}}$ の係数は $\frac{t+1}{m}$ 以下

一方. $B^+_{\bar{W}}$ の係数が 1 の成分 D は $B^+_{\bar{W}} - \frac{t}{\ell m} G_{\bar{W}}$

の係数は $1 - \frac{t}{\ell m} \mu_D G_{\bar{W}} \leq 1 - \frac{t}{\ell m}$

よって $\Delta_{\bar{W}}$ の係数は uniform な $\varepsilon = \varepsilon(d, \ell m)$ に依存して $1 - \varepsilon$ でおさえられる.

よって $(\bar{W}, \Delta_{\bar{W}})$ は sub ε-lc □

次に△

$$\phi_* \alpha^*(K_{\bar{W}} + \Delta_{\bar{W}}) = K_X + \Delta$$

$$\rightsquigarrow \Delta = B^+ + \frac{t}{m} A - \frac{t}{lm} G$$

て
$$\left(\begin{array}{l} \phi_* \alpha^*(K_{\bar{W}} + B^+_{\bar{W}}) \sim K_X + B^+ (\underset{\Theta}{\sim} 0) \\ \boxed{\text{by the negativity 方}} \\ A = \phi_* \alpha^* \underset{\substack{\| \\ A_W}}{A_{\bar{W}}} \quad G = \phi_* \alpha^* G_{\bar{W}} \text{ は by def} \end{array} \right)$$

てこっちの方がいい。

$\Theta := \frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}\Omega$ とおくと、

$$\Theta = \frac{1}{2}B^+ + \frac{t}{2m} A - \frac{t}{2lm} G + \frac{1}{2}\Omega$$

$$\geq \frac{1}{2}B^+ + \frac{t}{2m} A - \frac{1}{2lm} G + \frac{t}{2}(G + lR) \geq \left(-\frac{1}{2lm} + \frac{t}{2}\right) G \geq 0$$

より Θ は eff となり、piecewise linearity of lc より

(X, Θ) は $\frac{1}{2}\varepsilon$-lc また $\Delta \underset{\Theta}{\sim} -K_X$, $\Omega \underset{\Theta}{\sim} -K_X$ $\rightsquigarrow$ $K_X + \frac{1}{2}(\Delta + \Omega) \underset{\Theta}{\sim} 0$.

Θ は t, l, m, n に依存した有限集合でかつてはないので、

Thm BAB for Spand より X は bdd.

Lem 1 (LC の piesemse linearlity)

(X, B): sub ε-lc　(X, B'): sub ε'-lc

$0 \leq \delta \leq 1$ に対すれ

$(X, (1-\delta)B + \delta B')$ は $(1-\delta)\varepsilon + \delta\varepsilon'$-sub lc.

∵ レポート 易

途中で使った Lemma の証明を書いておく。
(HMX の birational Auto の論文)

Lem　X: norml proj. var of dim d
　M: base point free Cartier s.t. $\phi_{|M|}$: birational mor.

$H := 2(2d+1)M$

$D = \sum D_i$ prime decomposition

$\Rightarrow D . H^{d-1} \leq \mathrm{vol}(K_X + D + H) \cdot 2^d$.

∵ Exceptional of $\phi_{|M|} . H^{d-1} = 0$

より　D は Exceptional of $\phi_{|M|}$ を含まないとしてよい。

$f: Y \to X$: log resolution of (X, D) とすると

$$D . H^{d-1} = \underbrace{\phi_*^{-1} D}_{\overset{\shortparallel}{G}} . (f^* H)^{d-1}$$

と

$\mathrm{vol}(Y, K_Y + G + f^* H) \leq \mathrm{vol}(X, K_X + D + H)$

より (Y, G) で示せば十分なので

X: sm, D: SNC と仮定してよい

またさらにblow upをすることで、(X, D)はpltとしてよい (i.e. Dのcompは交わらない)
Reid−Fukuda型の消滅定理より $H^i(X, K_X+D+mH)=0$ $\forall m \in \mathbb{N}$, $i>0$
〃 $H^i(D, K_X+D+mH)=0$ $\forall m \in \mathbb{N}$, $i>0$
となる。よって $P(m) = \dim H^0(D, K_X+D+mH)$ は次元 $d-1$ の多項式となる (Riemann−Rochの定理)
Cone thm より K_X+D+H は big.
さらに今、$(X, D+H)$ は lg canl model をもつ (BCHM)
← 今回は $D+H$ は dlt + ample 20 に分解できるが

よって Vanishing Thm (これは一見 Ambro−Fujino型が必要てうにみえるけど川又−Viehwegで十分) ← 理由を会

$$Q(m) := h^0(X, \mathcal{O}_X(2m(K_X+D+H)))$$ は polynomial of degree d.

ちなみに
$P(m)$ の leading term の係数は $\dfrac{D.H^{d-1}}{(n-1)!}$.

$Q(m)$ の 〃 $\dfrac{2^d \cdot \mathrm{vol}(X, K_X+D+H)}{d!}$ である

ここも正確には Riemann−Roch が従う。

今 $A_m := K_X+D+mH$ とする。

<u>Claim</u> $Q(m) - Q(m-1) \geq P(m)$ $\forall m \in \mathbb{N}$ ⇝ Lemmaはただちにわかる

∵ 実際は $Q(m-1) = h^0(X, 2(m-1)A_1) \leq h^0(X, 2mA_1 - D)$
$|K_X+H| \neq \phi$
← Vanishing Thm からわかる. Easy Fujita type thm.

よリ
$P(m) \leq h^0(X, 2mA_1) - h^0(X, 2mA_1 - D)$ を示せばよい.

No. ~~2~~ 10

Date

今、次の図式に着目すると

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{O}(A_m - D) \arrow[r, "f_1"'] \arrow[d] & \mathcal{O}_X(A_m) \arrow[r, "g_1"'] \arrow[d] & \mathcal{O}_D(A_m) \arrow[r] \arrow[d, "u"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X(2mA_1 - D) \arrow[r, "f_2"'] & \mathcal{O}_X(2mA_1) \arrow[r, "g_2"'] & \mathcal{O}_D(2mA_1) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

ただし↓は次のようにつくる:

$s \in H^0(X, K_X + D + (2n+1)M)$, $\ell \in H^0(X, \mathcal{O}_X((2n+1)M))$

で $s_{|D} \neq 0$, $t_{|D} \neq 0$ とすることが (D への制限の global section の射の全射性 ← vanishing thm より)

わかる.

$t := s^{\otimes 2n} \otimes \ell$ として ↓は $\otimes t$ とする. i.e. $u = \otimes t$.

よって ↓は injection. g_1, g_2 の H^0 の射は van. Thm より surjection

よって $\forall u \in \mathrm{Im}\,\mathrm{H}$ $\exists\, w \in H^0(2mA_1)$ s.t. $g_2(w) = u$.

$\rightsquigarrow P(n) \leq h^0(X, 2mA_1) - h^0(2mA_1 - D)$ ▷

先週の ~~Thm Adを示す. すなわち.~~

Thm LBd-α_d + Thm BAB$_{d-1}$ ∴ Thm Bd red d + Thm EfBird + Thm BdBmp

$\Rightarrow$ <u>Thm Ad</u> $d \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, $\exists\, \alpha = \alpha(d, \varepsilon) > 0$ s.t.
(X, B) : d-dim ε-lc weak Fano pair.
$$\mathrm{lct}(|-(K_X+B)|_{\mathbb{R}}, X, B) \geq \alpha.$$

まず次のPropositionを示す.

<u>Prop</u> 2. $d \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, Assume

Thm BdComp d
Thm LBd-α_d hold.
Thm EfBird

$\Rightarrow$ $\exists\, n > 0$ s.t. ・X: $\mathbb{Q}$-fac ε-lc Fano of dim d.
$\quad\;\; \overset{\shortparallel}{n(d,\varepsilon)}$ ・$\rho(X) = 1$
・$0 \leq L \sim_{\mathbb{R}} -K_X$

$\Rightarrow$ $^\forall$ coeff of $L < n$.

☺ <u>Step 1</u> $\mathrm{Supp}\, L = T$: prime に帰着

☺ 実際 $T \subseteq \mathrm{Supp}\, L$ ととると.
今 $\rho = 1$ より
$L \equiv uT$ s.t. $u \geq \mu_T L$ となる.

X: $\mathbb{Q}$-Fano より $L \sim_{\mathbb{R}} uT$ よって $L = uT$で示せば十分

Date

<u>Step2</u> 今、Thm Bd Compd + Thm EffBird より

$\exists n = n(d,\varepsilon) \in \mathbb{N}$, $\exists v = v(d,\varepsilon) > 0$ s.t.
- $|-nK_X|$ gives a birational map
- $\Omega \in |-K_X|_{\mathbb{Q}}$ s.t. (X,Ω) lc, $n(K_X+\Omega) \sim_{\mathbb{Z}} 0$
- $\mathrm{vol}(-K_X) < v$.

この Ω に対して次を主張する

$\exists \phi: W \longrightarrow X$: log res of (X,Ω)

$\phi^*(-nK_X) \sim_{\mathbb{Z}} \underset{\text{b.p.f}}{A_W} + \underset{\text{fixed div}}{R_W}$

$\longrightarrow$ $(W, A_W + R_W + \text{excep of } \phi)$ is log birat. bdd.

& 次の図が得られる

$$\begin{array}{ccc} (W, \overbrace{A_W + R_W + \underbrace{\text{excep of } \phi}_{E_W}}^{A_W}) & \xrightarrow{\Psi} & (V, \overset{\Psi_* A_W}{A_V} + \overset{\Psi_* R_W}{R_V} + \overset{\Psi_* E}{E_V}) \ \text{log bdd.} \quad (= A_V) \\ \downarrow \phi & \searrow^{A_W \text{による射}} & \downarrow \pi \\ (X, \Omega = A + R) & & (\bar{W}, A_{\bar{W}} + R_{\bar{W}} + E_{\bar{W}}) \ \text{log bdd} \quad (= A_{\bar{W}}) \end{array}$$

bddかまだわからない

∵ このStepの証明は、Prop 1 のStep1とまったく同じ。

<u>Step3</u> coeff of $\Psi_* \phi^* \Omega < \exists v' = v'(d,\varepsilon,n) \leftarrow \exists H$: v.a. $H^d < r(d,$ $H^{d-1} \cdot \Psi_* \phi^* \Omega < v''$ $\; v''(d,$ とくる

∵ これは実際交点数の計算により わかる

H を V の bdd familyに ふさわしい v.a. div. とする。

このとき $\mathrm{vol}(rA_V - H) > 0$ な $r = r(d,\varepsilon,n) > 0$

とできる (A_V も bddだから)

このHに対して　Proj. formula　　ψ^*Hはnef & $\phi^*\Omega \ge 0$

$$H^{d-1}\cdot(\psi_*\phi^*\Omega) \overset{\downarrow}{=} (\psi^*H)^{d-1}\cdot\phi^*\Omega \le (\psi^*H+\phi^*\Omega)^d$$

$$= \mathrm{vol}(\psi^*H+\phi^*\Omega)$$

$\uparrow$ $\phi^*\Omega$はnef ← Xの$\rho=1$なるから

$$\le \mathrm{vol}(\rho A_W+\phi^*\Omega)$$

$A_W = \psi^*A_V$

$$\le \mathrm{vol}(\rho A+\Omega)$$

$\uparrow$ ϕ_*

$$\le \mathrm{vol}(-(\rho n+1)K_X) \ : \ \mathrm{bdd}.$$

$\uparrow$

$$\left(\begin{array}{c}\rho A+\rho R\\ \le\\ -nK_X\end{array}\right) \qquad \square .$$

Step3より もしTがψ-exceptionalでなければ [illegible] 上から boundされ.

したがってTはψ-exceptionalとしてよい.

さらに今 $B \ge 0 \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ general member をとって
(X, B)：ε-lcとなるものをとる.

B_Vを
$$\underset{\sim_{\mathbb{Q}} 0}{\psi_*\phi^*(K_X+B)} = \underset{\sim_{\mathbb{Q}} 0}{K_V+B_V} \qquad (B_V\text{はeffectiveとは限らない})$$
と定める.

Step4 B_Vの什一寸一 つbdd
↑(d, ε, n)のみに依存.

∵ DをB_Vの什一寸一が負のcompとする.

一方, $K_V + \Gamma_V = \psi_* \phi^* K_X \rightsquigarrow \Gamma_V + \underset{\substack{\vee\!\mid \\ 0}}{\underline{\psi_* \phi^* B}} = B_V$ by def.

$$\rightsquigarrow \mu_D \Gamma_V \leq \mu_D B_V$$

よって $\mu_D \Gamma_V$を下からおさえればよい.

今, $K_V + \Gamma_V \equiv -\psi_* \phi^* \Omega$ より

By Step3, $H^{d-1} \cdot \Gamma_V > \text{bdd}$ ← ($K_V \cdot H^{d-1}$は有限とーり かつ $\operatorname{Supp} \psi_* \phi^* \Omega$は什一寸一が上からbdd で, かつそれぞれのcompはboundedだから.)

$\Gamma_V = \Gamma_V^+ - \Gamma_V^-$と分解すると,

$$\Gamma_V^+ \leq \Lambda_V \text{ より } \Gamma_V^+ \cdot H^{d-1} \leq \text{bdd}.$$

↑Γ_V^+はX上exceptionalだから

$$\rightsquigarrow \underset{< \text{bdd}.}{H^{d-1} \cdot \Gamma_V^-} \quad \square.$$

Step 5 Prop 2の証明を終わらせる。 (Thm LBd-dd をつかう)
$M := \psi_* \phi^* uT$

Step 4 より B_V の係数が下からおさえられているので

$\exists \alpha = \alpha(d, \varepsilon, n) > 0$ s.t. $\Delta := \alpha B_V + (1-\alpha) \Lambda \geq 0$ となる。

$\rightsquigarrow$ (V, Δ) : ε'-lc.

$\varepsilon' = \alpha \varepsilon$
discrepancy : α piecewise linearity
(V, B_V) : ε-sub lc.

このΔに対して、Hを d, ε, n にのみ依存してとりかえて、

$H - \Delta$: ample と仮定することができる。

実際、$H - \Delta = \alpha(H - B_V) + (1-\alpha)(H - \Lambda_V)$

$H - B_V = H + K_V$ ← Vがbddなれ ample にできる。
$H - \Lambda_V$: ample にできる ← Λ_V は bdd なので

さらに今、$H - \underbrace{\psi_* \phi^* uT}_{M}$ ample とれる。

↗理由
なぜなら $\mathrm{Supp}\, M$ は X上 exceptional (これは T の strict transform が ψ_* でつぶれるからわかる)

なので、$\mathrm{Supp}\, M$ は bdd である。

さらに $\Omega \equiv uT$ より $M \equiv \psi_* \phi^* \Omega$ で

Step 3で Hとの交点数が上からbdd より M の係数も上から bdd と

わかる。

Date

一方.

T: ample なので $\psi^*M - \phi^*uT$ は anti-ψ-nef かつ $\psi_*(\psi^*M - \phi^*uT) \geq 0$

より the negativity が

$\phi^*uT \leq \psi^*M$ がしたがう

↳ 特に ψ^*M の T の multiplicity は u 以上

$\rightsquigarrow (V, \Delta + \frac{1}{u}M)$: NOT klt

$$\left(\begin{array}{l} \because \\ a(T, V, \Delta + \frac{1}{u}M) \leqq a(T, V, \Delta) - 1 \\ \text{一方 } a(T, V, \Delta) = \alpha\, \underset{\substack{\| \\ a(T, X, B) \\ \wedge| \leftarrow T \text{は } X \text{上の因子だから} \\ 1}}{a(T, V, B_V)} + (1-\alpha)\, \underset{\substack{\wedge| \leftarrow \Omega_V \leq \Delta_V \\ a(T, V, \Omega_V) \\ \| \\ a(T, X, \Omega) \leq 1}}{a(T, V, \Delta_V)} \cdots ! \\ \text{よって 左辺} \leq 1 \qquad \text{ここで } \Omega_V \text{ は } K_V + \Omega_V = \psi^*(K_X + \Omega) \end{array}\right)$$

よって

Thm LBdd-d をつかう $\left\{\begin{array}{l} H - \Delta : \text{ample} \\ (V; \Delta) : \varepsilon\text{'-lc だから つかえる} \\ (V; H) : \text{bdd} \end{array}\right.$

$$\mathrm{lct}(|H|, X, \Delta) \geq \alpha = \alpha(d, \varepsilon, \underset{\substack{\| \\ H^d}}{r}) \quad (H^d \leq r)$$

$\wedge|$ ⇐ $H - M$: ample だから

$\mathrm{lct}(|M|, X, \Delta)$

$\wedge|$

$\rightsquigarrow \alpha < \frac{1}{u} (\Leftrightarrow u < \frac{1}{\alpha})$ □

<u>Thm A_d</u> を示す.

$d \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ $\exists a = a(d, \varepsilon) > 0$

s.t. (X, Δ): ε-lc weak Fano

$$\mathrm{lct}(|-(K_X+B)|_{\mathbb{R}}, X, \Delta) > a.$$

X: $\mathbb{Q}$-factorial は仮定しておく (Q-factorization をとる)

(:) $\varepsilon' > 0$ fix. $L \geq 0 \underset{\mathbb{R}}{\sim} -(K_X+B)$

$\overset{\wedge}{\varepsilon}$

$s := \varepsilon'\text{-}\mathrm{lct}(L; X, B)\ (\leq \mathrm{lct}(L; X, B))$

<u>ETS</u> s の Lower bd を与えればよい

よって $s < 1$ を仮定してよい

T: ε'-lc place of $(X, \Delta + sL)$

T の log discrepancy $= \underset{<1}{1-\varepsilon'}$ より

もし $T \neq X$ なら T の extraction がとれる.

$\phi: Y \to X$ は T の extraction か id とする

$\phi^*(K_X+\Delta) =: K_Y + \Delta_Y$ と Δ_Y, L_Y を定める.

$\phi^* L =: L_Y$, これと $-(K_Y + \Delta_Y + sL_Y) \underset{\mathbb{R}}{\sim} \phi^*(K_X + \Delta_X + sL) \sim -(1-s)L$

定義に $\rightsquigarrow$ $\mu_T \Delta_Y \leq 1-\varepsilon$ & $\mu_T(\Delta_Y + sL_Y) = 1-\varepsilon'$

$\rightsquigarrow$ $\mu_T sL_Y \geq \varepsilon - \varepsilon'$ $\rightsquigarrow$ $\mu_T (1-s) L_Y \geq \frac{1-s}{s}(\varepsilon - \varepsilon')$

よって $\mu_T((1-s) L_Y)$ の upper bd が与えられればいい (Prop 2の形に分ければ

ここで Y は ..., Fano type なので

$(-T)$-MMP を走らせると、$-T$ は p.e. でないので

$$\begin{array}{c} Y \overset{\varphi}{\dashrightarrow} Y' \supset T_{Y'},\ Y' \text{ も } \mathbb{Q}\text{-fac } \varepsilon\text{-lc.} \\ \downarrow \\ Z' \end{array}$$

$(-T)$-MFS

$L_{Y'} := \varphi_* L_Y$ とおいて

$\mu_{T_{Y'}} (1-s) L_{Y'} < \mathrm{bdd}$ を示せばよい

$\dim Z' = 0$ のとき Prop 3 より したがう。($-K_{Y'} \underset{\mathbb{R}}{\sim} \Delta_{Y'} + (1-s) L_{Y'}$ だから)

$\dim Z' > 0$ のとき

F を $Y' \to Z'$ の gen fiber とすれば

$-K_F$: ample で F は ε-lc. $-K_F \underset{\mathbb{R}}{\sim} \Delta_F + (1-s) L_F$

$\because$ $\mu_T((1-s)L_{Y'}) = \mu_{T_F'}((1-s)L_F)$ だから $\because$

T_F' は T_F の component.

thm A_{d-1} より したがう。□

<u>Note</u> Thm $A_{d-1} \Leftarrow$ Thm BAB_{d-1} + Thm LD_{d-1}-α_{d-1}

Step 7 完