東京大学理学部オープンキャンパス 2013

曲線の長さを測る

参考資料

足助 太郎

２０１３年８月８日
８月１０日追記・８月１２日再追記

ここでは $0 \leq t \leq 1$ について定まった関数[†1] l のグラフとして表される曲線を考える．

定義 1. 1) $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x, y \text{ は実数 }\}$ と置き，**平面**と呼ぶ．p が $\mathbb{R}^2$ の点である（p が $\mathbb{R}^2$ に属する）ことを $p \in \mathbb{R}^2$ と表す．$p \in \mathbb{R}^2$ であれば実数 x, y を用いて $p = (x, y)$ と表すことができる．

2) $\mathbb{R}^2$ 内の図形（$\mathbb{R}^2$ の部分集合）L が**曲線**であるとは，$0 \leq t \leq 1$ について定まったある関数 l が存在して

$$L = \{(t, l(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

が成り立つこととする．また，l を L を表す関数と呼ぶことにする．<u>以下では l の変数は t とする．</u>

例 2. $\mathbb{R}^2$ の点 $(0, a)$ と点 $(1, b)$ を結ぶ線分を L とすると，L は曲線である．実際，

$$l(t) = (1-t)a + tb$$

とおけば，L は l により表される．

定義 3. 1) $0 \leq t \leq 1$ とする．極限（極限値）

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{l(t+h) - l(t)}{h}$$

が存在するとき，l は t において**微分可能**であると言う．また，上の極限値を ***l* の *t* における微分係数**と呼び，$\dfrac{dl}{dt}(t)$ で表す．

2) l は $0 \leq t \leq 1$ をみたす任意の t において微分可能であるとする．$\dfrac{dl}{dt}$ を，t に $\dfrac{dl}{dt}(t)$ を対応させる関数とみなして，l の**導関数**などと呼ぶ．また，$\dfrac{dl}{dt}$ が連続であるとき，l は $\boldsymbol{C^1}$ **級**であると言う．

3) 曲線 L を表す関数 l が C^1 級であるとき，L は $\boldsymbol{C^1}$ **級**であるとする．

以下では折れ線あるいは C^1 級の曲線のみを考える．線分（例 2）や円弧（例 5 の 2)）は C^1 級の曲線である．曲線の長さは次のように定める．

定義 4. $k \geq 1$ とし，$t_0, t_1, \ldots, t_k$ を $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$ をみたす実数とする．このとき，$p_0, \ldots, p_k$ を，$0 \leq i \leq k$ について $p_i = (t_i, l(t_i))$ により定める．そして，$L(t_0, t_1, \ldots, t_k)$ を $p_0, p_1, \ldots, p_k$ をこの順番に結んで得られる折れ線の長さとする．k や $t_0, t_1, \ldots, t_k$ を（上の条件をみたしつつ）任意に動かして得られる最大値[†2]を L の**長さ**と定める．

[†1] 正しくは「函数」であるが，教科書に合わせる．

[†2] 実際には**上限**と呼ばれる値を考える．例えば $L(t_0, t_1 \ldots, t_k)$ が，k や $t_0, t_1, \ldots, t_k$ を動かしたとき $0 \leq x < 1$ 全体を限無く動くとすると，$L(t_0, t_1 \ldots, t_k)$ の上限は 1 である．

$L(t_0,\dots,t_k)$ は次のように求まる．p_{i-1} と p_i を結ぶ線分の長さは，三平方の定理（ピタゴラスの定理）により $\sqrt{(t_i-t_{i-1})^2+(l(t_i)-l(t_{i-1}))^2}$ で与えられる．よって，折れ線全体の長さ $L(t_0,t_1\dots,t_k)$ は

$$\sum_{i=1}^{k}\sqrt{(t_i-t_{i-1})^2+(l(t_i)-l(t_{i-1}))^2}$$

である．これを

$$\sum_{i=1}^{k}\sqrt{1+\left(\frac{l(t_i)-l(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}\right)^2}\cdot(t_i-t_{i-1})$$

と書き換える．すると，平均値の定理により $t_{i-1}\leq s_i\leq t_i$ をみたす s_i が存在して[†3]

$$\frac{l(t_i)-l(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}=\frac{dl}{dt}(s_i)$$

が成り立つ．折れ線による近似を良くしていくためには，t_i 達の間隔を 0 に近づければよいと考えられる．従って，L 本来の長さは

$$(*)\qquad \lim_{t_i\text{ 達の間隔}\to 0}\sum_{i=1}^{k}\sqrt{1+\left(\frac{dl}{dt}(s_i)\right)^2}\cdot(t_i-t_{i-1})$$

で与えられると考えられる．そこで，幾つかの例について極限 $(*)$ を計算してみる．

例 5. 1) $(0,a)$ と $(1,b)$ を結ぶ線分（例 2）を考える．$0=t_0<t_1<\cdots<t_k=1$ とすると，$t_{i-1}\leq s_i\leq t_i$ なる s_i について $\dfrac{dl}{dt}(s_i)=b-a$ が成り立つ（s_i に依らない）．従って

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\sqrt{1+\left(\frac{dl}{dt}(s_i)\right)^2}\cdot(t_i-t_{i-1})&=\sum_{i=1}^{k}\sqrt{1+(b-a)^2}\cdot(t_i-t_{i-1})\\&=\sqrt{1+(b-a)^2}\sum_{i=1}^{k}(t_i-t_{i-1})\\&=\sqrt{1+(b-a)^2}\cdot(t_k-t_0)\\&=\sqrt{1+(b-a)^2}\end{aligned}$$

が成り立つ．これは t_i 達に依らない定数だから，t_i 達の間隔を 0 に近づけても値は変化しない．従って極限 $(*)$ は $\sqrt{1+(b-a)^2}$ に等しい．また，この値は三平方の定理から求まる，$(0,a)$ と $(1,b)$ を結ぶ線分の長さと一致する．

2) 原点を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円周のうち，$(0,\sqrt{2})$ と $(1,1)$ を右回りに結ぶ円弧[†4]を L とする．定義により L の長さは $\sqrt{2}\dfrac{\pi}{4}$ であるが，ここではそのことは一度忘れ，長さを $\sqrt{2}\lambda$ とする（単に λ としないのは，これから出てくる式が簡単になるようにするためである）．そして，極限 $(*)$ の値は $\sqrt{2}\lambda$ に等しいことを示す．さて，l を

$$l(t)=\sqrt{2-t^2}$$

により定めると，円弧 L は，l の $0\leq t\leq 1$ におけるグラフとして表される．また，l は（従って L は）C^1 級であって，

$$\frac{dl}{dt}(t)=-\frac{t}{\sqrt{2-t^2}}$$

[†3] 平均値の定理は通常は数学 III で扱う．平均値の定理によれば s_i は $t_{i-1}<s_i<t_i$ をみたすように取れるが，ここでは等号がついても構わない．

[†4] 正確には二つある円弧のうち $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)$ を含むものを L とする．

が成り立つ[†5]．$0=t_0<t_1<\cdots<t_k=1$，$t_{i-1}\le s_i\le t_i$ とすると

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\sqrt{1+\left(\frac{dl}{dt}(s_i)\right)^2}\cdot(t_i-t_{i-1})&=\sum_{i=1}^{k}\sqrt{1+\frac{{s_i}^2}{2-{s_i}^2}}\cdot(t_i-t_{i-1})\\&=\sum_{i=1}^{k}\sqrt{\frac{2}{2-{s_i}^2}}\cdot(t_i-t_{i-1})\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで角度には弧度法を用いる（半径が 1 で，弧の長さは x であるような扇形の中心角を x とする）こととし，θ_i を y 軸と，原点と $p_i=(t_i,l(t_i))$ を結ぶ直線のなす角とする．すると $0=\theta_0<\theta_1<\cdots<\theta_k=\lambda$ が存在して $\sqrt{2}\sin\theta_i=t_i$ が成り立つ．また，$\theta_{i-1}\le\phi_i\le\theta_i$ なる ϕ_i が存在して $s_i=\sqrt{2}\sin\phi_i$ が成り立つ．このように $\theta_0,\ldots,\theta_k$ と $\phi_1,\ldots,\phi_k$ を定めると，上の式の右辺は

$$\sum_{i=1}^{k}\sqrt{\frac{2}{2-2\sin^2\phi_i}}\cdot\left(\sqrt{2}\sin\theta_i-\sqrt{2}\sin\theta_{i-1}\right)=\sum_{i=1}^{k}\sqrt{2}\,\frac{\sin\theta_i-\sin\theta_{i-1}}{\cos\phi_i}$$

に等しい．一方

$$\begin{aligned}\sin\theta_i&=\sin\left(\frac{\theta_i+\theta_{i-1}}{2}+\frac{\theta_i-\theta_{i-1}}{2}\right),\\\sin\theta_{i-1}&=\sin\left(\frac{\theta_i+\theta_{i-1}}{2}-\frac{\theta_i-\theta_{i-1}}{2}\right)\end{aligned}$$

であることから，三角関数（特に，正弦関数）の加法公式[†6]を用いると

$$\sin\theta_i-\sin\theta_{i-1}=2\cos\frac{\theta_i+\theta_{i-1}}{2}\sin\frac{\theta_i-\theta_{i-1}}{2}$$

を得る．よって，とりあえず $\phi_i=\dfrac{\theta_i+\theta_{i-1}}{2}$ とすると

$$\sqrt{2}\frac{\sin\theta_i-\sin\theta_{i-1}}{\cos\phi_i}=2\sqrt{2}\sin\frac{\theta_i-\theta_{i-1}}{2}$$

が成り立つ．一方，$0\le x<\dfrac{\pi}{2}$ であれば $0\le\sin x\le x\le\tan x$ が成り立つ（図 1）ので，$\cos x\le\dfrac{\sin x}{x}\le 1$ が成り立つ．

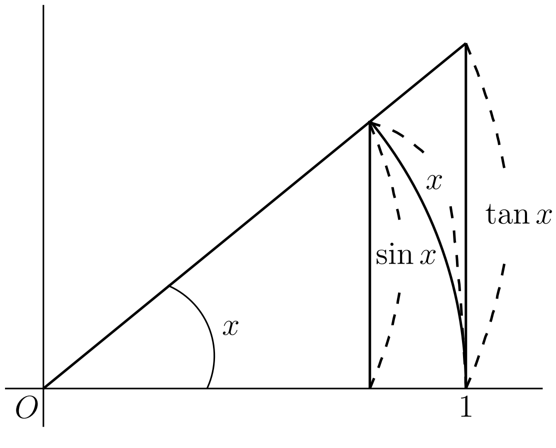

図 1: $x,\sin x,\tan x$ の比較

[†5] $\sqrt{2-t^2}$ のような，根号を含むような関数の微分は通常は数学 III で扱う．
[†6] 通常は数学 II で扱う．

このことから，

$$\sum_{i=1}^{k} 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\theta_i-\theta_{i-1}}{2}\right)\cdot\frac{\theta_i-\theta_{i-1}}{2} \le \sum_{i=1}^{k}\sqrt{2}\frac{\sin\theta_i-\sin\theta_{i-1}}{\cos\phi_i} \le \sum_{i=1}^{k}\sqrt{2}(\theta_i-\theta_{i-1})$$

が従う．一番右の辺は $\sqrt{2}(\theta_k-\theta_0)=\sqrt{2}\lambda$ に等しい．一方，一番左の辺は，$\theta_i-\theta_{i-1}$ を 0 に近づけていくと，$\sqrt{2}\lambda$ に限りなく近づく．これは次のように示すことができる．$\varepsilon>0$ とし，$\theta_0,\dots,\theta_k$ は $\theta_i-\theta_{i-1}<\delta=\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\lambda}\varepsilon}$ をみたすとする．すると $\cos\frac{\theta_i-\theta_{i-1}}{2}>1-\frac{\delta^2}{2}$ が成り立つ．このことから

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\theta_i-\theta_{i-1}}{2}\right)\frac{\theta_i-\theta_{i-1}}{2} &> \sum_{i=1}^{k} 2\sqrt{2}\left(1-\frac{\delta^2}{2}\right)\frac{\theta_i-\theta_{i-1}}{2}\\ &=\sqrt{2}\left(1-\frac{\delta^2}{2}\right)(\theta_k-\theta_0)\\ &=\sqrt{2}\left(1-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\lambda}\right)\lambda\\ &=\sqrt{2}\lambda-\varepsilon\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，ε は限りなく小さくすることができる．実際，δ を上の式で定めて $\theta_i-\theta_{i-1}<\delta$ であるように θ_i 達を選べばよい[†7]．従って，$\theta_i-\theta_{i-1}$ を限りなく小さくしたときの，$\sum_{i=1}^{k} 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\theta_i-\theta_{i-1}}{2}\right)\cdot\frac{\theta_i-\theta_{i-1}}{2}$ の極限が $\sqrt{2}\lambda$ より真に小さいとすると，これは ε が限りなく小さくできることに反するから，この極限は $\phi_i=\frac{\theta_i+\theta_{i-1}}{2}$ であるときに限れば，$\sqrt{2}\lambda$ に等しい．必ずしも ϕ_i は $\frac{\theta_i+\theta_{i-1}}{2}$ に等しいとは限らない[†8]が，$\theta_{i-1}\le\phi_i\le\theta_i$ ならば，$\cos\phi_i$ の値は極限には影響しない程度にしか変わらないことを示すことができて，このことから円弧の長さは $\sqrt{2}\lambda$ であることが示される．

一般に，極限 $(*)$ は $\frac{dl}{dt}$ の $0\le t\le 1$ の範囲での（**リーマン）積分**と呼ばれるものであって[†9]，

$$\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{dl}{dt}(t)\right)^2}\,dt$$

で表される（この最後の段階で曲線が C^1 級であることが必要になる）．これらのことを正確に議論するためには，大学一年生（一回生）で学ぶ微積分の知識が必要となる．

補足（8 月 10 日追記）

†8 の「等しいとは限らない」は誤りで，例 5 の 2) においては $\phi_i=\frac{\theta_i+\theta_{i-1}}{2}$ が成り立つ（図 2 を参照のこと）．従って，ここまでの議論で円弧の長さは $\sqrt{2}\lambda$ であることが示される．円弧ではない一般の曲線について長さを同様の方法で求めようとするとこの種の議論が必要になる．また，例 5 の 2) において $\phi_i=\frac{\theta_i+\theta_{i-1}}{2}$ が成り立つことを用いずに円弧の長さを求めることもできて，その場合には「$\cos\phi_i$ の値は極限に影響しない程度にしか変わらない」ことを用いた議論が必要となる．なお，この誤りは参加者にご指摘いただいた．感謝申し上げる．

[†7] ε を決めてから δ を定めていることに注意せよ．これは本質的である．

[†8] 8 月 10 日追記：「等しいとは限らない」は誤りで，この例においては $\phi_i=\frac{\theta_i+\theta_{i-1}}{2}$ が成り立つ．詳しくは「補足」を参照のこと．

[†9] 区分求積法について知っていれば，それを思い出してみよ．

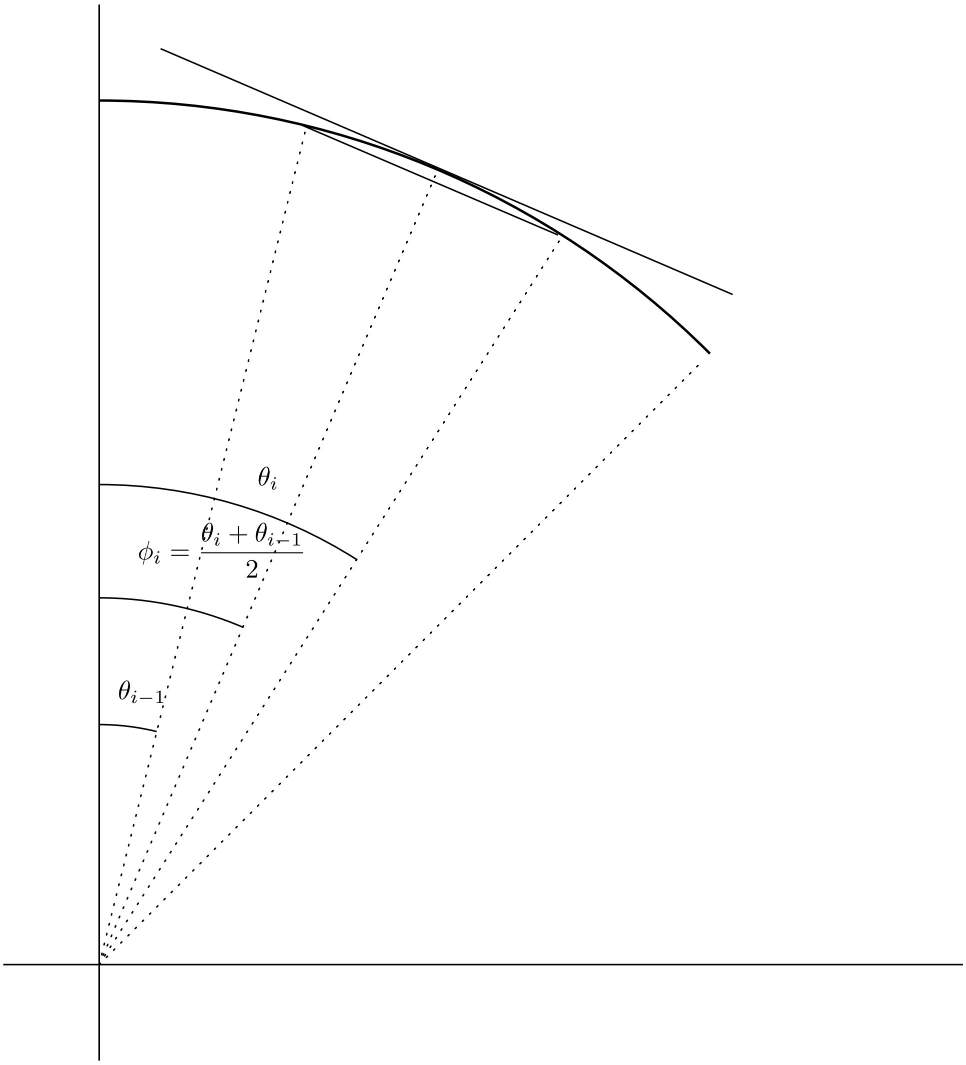

図 2: $\phi_i = \dfrac{\theta_i + \theta_{i-1}}{2}$ が成り立つ

参考文献

[1] フラクタル集合の幾何学，K.J. ファルコナー著，畑 政義訳，近代数学社，1989.

[2] 曲線と曲面の微分幾何（改訂版），小林 昭七著，裳華房，1995.

[3] トポロジー（岩波全書 276），田村 一郎著，岩波書店，1972.

[4] 多様体　増補版（岩波全書 288），服部 晶夫著，岩波書店，1989.

参考文献について（8 月 12 日追記）
[1] ここでは微分可能な（正確には C^1 級の）曲線について扱ったが，長さを定義する（定義 4）ためには，例えば l を連続と仮定すれば十分である．このような場合には，直感とは反することがいろいろ生じてくる．本書はこのようなことに関する入門書の一つである．
[2] 曲線には長さだけではなく,（ある程度微分可能性を仮定すれば）曲率などの様々な「量」が定まる．また，ここでは平面上の曲線を扱ったが，例えば空間内の曲線を考えることもできる．本書はこのようなことに関する入門書である．曲線だけではなく，曲面を微分などを用いて調べることに関する入門書でもある．

[3] 上に挙げた [2] では曲面を微分などを用いて「計算」を主な手段として調べることについて述べられているが，もっと図形的な考察の方法もある．本書はそのようなことに関する入門書である．大学の専門課程で学ぶような知識も必要になってくるので，高校生には冒険かもしれないが，大まかな雰囲気をつかめれば良いと思う．なお，本書は [1]，[2] やここでの話とは異なり，もっと高い次元の空間（曲線や曲面を一般化した，多様体と呼ばれる空間）についても扱っている．
[4] 上に挙げた [3] にも現れる「多様体」は幾何だけではなく，数学全体で用いられる基礎的な概念である．本書は標準的な入門書の一つである．本書も大学の専門課程向けである．