横断的に複素解析的な葉層構造について

広島大学大学院理学研究科　　足助 太郎

１．序

葉層構造とは、簡単にいえば多様体の部分多様体へのきれいな分割のことです。ここではそれぞれの部分多様体の次元は一定であるとし、その次元を葉層の次元と呼び、またその余次元を葉層の余次元と呼ぶことにします。次元もしくは余次元が 1 の葉層の研究は以前から盛んで、例えば 3 次元多様体の葉層構造は深く研究されています。一方、次元が 1 とは限らない余次元が高い葉層構造の振る舞いは非常に複雑でその研究はあまり進んでいません。最初に研究すべき対象は実余次元 2 の葉層構造だと考えられますが、これらは $\boldsymbol{R}^2$ の (局所) 微分同相群の複雑さから余次元 1 の場合とは本質的に異なる振る舞いをします。例えば Reeb の大域安定性定理[14] は一般にはもはや成り立ちませんし、葉層構造の力学系的性質の研究において重要な極小集合と呼ばれるもののよい分類も今のところ与えることができません。そこで、何らかの方法で研究の対象を絞ることが必要になりますが、ここでは横断的に適当な幾何学的構造をもつ葉層を対象にします。葉層が横断的に幾何学的構造を持つとは、少し乱暴に言えば葉層構造をファイバーバンドルだと思ったときにその底空間に幾何学的構造が入っているということです。これは一般的に行われる手段の一つで、例えば横断的に Riemann 計量が入る場合などは、余次元がさらに高い場合も含め Molino らによりよく研究されています。ここでは例えば次のような理由から横断的に複素解析的な構造を持つ葉層構造を考えます：

1) 実余次元 2 の場合には横断的に Riemann 計量が入る場合の一般化になっている (より正確には、横断的に向き付け可能、つまり「底空間」が向き付け可能であることを仮定します)。

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

2) 実 2 次元多様体には必ず複素構造が入る。
3) 実余次元 2 の場合にはある意味で 1 次元的になる。例えば Reeb の大域安定性定理が成り立つ。
4) 複素力学系の研究手法・結果が応用できる、もしくは参考になることが期待される。また、場合によってはその逆もありうる。
5) 例 2.3 や注 2.6 で触れるように、横断的に複素解析的な葉層構造の研究は複素多様体の研究と密接に結びつく。

これらを踏まえて、本講演では複素余次元 1 の場合を念頭におきつつ横断的に複素解析的な葉層について紹介します。横断的に複素解析的な葉層構造へのアプローチはさまざまなものがありますが、今回は二次特性類を用いたものについて紹介します。

2 . 基本的な例

まず基本的な例を幾つか挙げます。

例–'定義' **2.1.** $\boldsymbol{R}^p \times \boldsymbol{C}^q$ とその分割 $\{\boldsymbol{R}^p \times \{z\} \,|\, z \in \boldsymbol{C}^q\}$ を考えると、これは横断的に複素解析的な葉層になります。後ほど正確に定義しますが、多様体が横断的に複素解析的な葉層構造をもつとは、その多様体が局所的にはこの例と同じ構造をもつことをいいます。また、多様体の分割を与えている部分多様体のことを葉と呼びます。この例では各 $\boldsymbol{R}^p \times \{z\}$ 一つ一つが葉です。

例 **2.2.** もう少し一般的に、$F \to E \xrightarrow{\pi} B$ を任意の複素多様体上のファイバーバンドルとします。ここでファイバーは任意の実多様体です。するとファイバーの集まり $\left\{F_p = \pi^{-1}(p) \,\middle|\, p \in B\right\}$ で与えられる E の分割は局所的には例 1 と同じですから、横断的に複素解析的な葉層構造となります。この例が示しているように、横断的な複素構造は一般には一意的ではありません。

例 **2.3.** F を複素多様体、B を実多様体、$\varphi : \pi_1(B) \to \mathrm{Aut}(F)$ を B の基本群から F の正則自己同型群への準同型写像とします。$\widetilde{B}$ を B の普遍被覆とし、ここでは $\pi_1(B)$ は $\widetilde{B}$ に左から作用するとします。すると $\widetilde{B} \times F$ には $\pi_1(B)$ が $\gamma \cdot (b, f) = (\gamma \cdot b, \varphi(\gamma)(f))$ により左から作用します。一方 $\widetilde{B} \times F$ には $\{b\} \times F$ を葉とする横断的に複素解析的な葉層構造が決まりますが、これは $\pi_1(B)$ の作用で不変ですから、この作用による商 $E = \widetilde{B} \times_\varphi F$ には上

の葉層から自然に横断的に複素解析的な葉層構造が定まります。これはサスペンジョンと呼ばれる構成です。

例 **2.4.** $G = \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})$ とし、その部分群 H, U をそれぞれ $H = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\}$、$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \middle| a \in \boldsymbol{C}, |a| = 1 \right\}$ として定めます。すると $\{gH \,|\, g \in G\}$ であたえられる G の分割は G の横断的に複素解析的な葉層構造を定めますので、これを $\mathcal{G}$ とします。U は右から自然に G に作用しますが $\mathcal{G}$ の各葉はこの作用で不変です。従って $\mathcal{G}$ から G/U の自然な葉層が決まりますが、これは横断的に複素解析的であることがわかります。これを $\mathcal{G}'$ とします。一方、G は G/U に左から自然に作用しますが、この作用は葉を (必ずしも自分自身とは限らない) 葉に写すので $\mathcal{G}'$ は葉層構造としてはこの作用により不変です。そこで Γ を $\Gamma\backslash G/U$ が多様体になるような離散群とすれば、$\mathcal{G}'$ は $\Gamma\backslash G/U$ の横断的に複素解析的な葉層を定めるので、これを $\mathcal{G}_\Gamma$ とします。よく知られているように Γ は $\Gamma\backslash G/U$、さらには $\Gamma\backslash G/\mathrm{SU}(2)$ が閉多様体になるように取ることができます。

例 **2.5.** $\boldsymbol{C}^{n+1}$ の自然な座標を $(z_0, \cdots, z_n)$、$\lambda = (\lambda_0, \cdots, \lambda_n)$ を零でない複素数の組で任意の i, j について $\lambda_i/\lambda_j \notin \boldsymbol{R}_{\leq 0}$ なるものとします。$\boldsymbol{C}^{n+1}$ 上のベクトル場 X_λ を $X_\lambda = \lambda_0 z_0 \dfrac{\partial}{\partial z_0} + \cdots + \lambda_n z_n \dfrac{\partial}{\partial z_n}$ で定めると、X の積分曲線は $\boldsymbol{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ の葉層構造を定めるのでこれを $\widetilde{\mathcal{F}}_\lambda$ とします。これは横断的に複素解析的になります[1]。ここで S^{2n+1} を $\boldsymbol{C}^{n+1}$ 内の単位球面とすると X は S^{2n+1} と横断的に交わるので、S^{2n+1} には $\widetilde{\mathcal{F}}_\lambda$ と共通部分を取ることにより新しい葉層構造が決まります。つまり、$\widetilde{\mathcal{F}}_\lambda$ の葉と S^{2n+1} の共通部分の連結成分を新たな葉とすることにより、S^{2n+1} には葉層構造が入ります。これを $\mathcal{F}_\lambda$ と呼ぶことにすると、$\mathcal{F}_\lambda$ は横断的に複素解析的であることは比較的容易にわかります。これらの葉層構造の複素余次元は n です。この構成は一般に Poincaré 型の特異点 (零点) のみを持つベクトル場について一般化することが出来ます。さらに、このような例から「切り貼り」をすることで新しい例を得ることができ、複素余次元が 1 の場合には後で述べる留数 (residue) を用いてそのような例に対して特性類を計算できることがわかります[3]。

[1] 実はより強く、複素解析的な葉層構造となります。

注 **2.6.** 例 2.5 のようにして得られる葉層構造 $(S^{2n+1}, \mathcal{F}_\lambda)$ は実の葉層構造としては非常に簡単なものですが、横断的に複素解析的な葉層構造としては非常に基本的であちらこちらに顔を出します。例えば、よく知られているように、f を適当な条件を満たす $\boldsymbol{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ の正則自己同型とすると f で生成される群 $\langle f \rangle$ は無限巡回群となり、$(\boldsymbol{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\langle f \rangle$ は $S^1 \times S^{2n+1}$ と同相となります (Hopf manifolds)。$(S^{2n+1}, \mathcal{F}_\lambda)$ は Hopf Manifold の無限小版と考えることができ、複素構造の変形などについて密接な関連があることが知られています[7]。また、ベクトル場 X に横断的な実 $(2n)$-次元多様体 M を $\boldsymbol{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ に埋め込めば、葉層の横断的に複素解析的な構造は M の複素構造を自然に決めますが、このような構成で今までにはあまり知られていなかったような non-Kähler なコンパクト複素多様体の例を得ることができます。例えば、例 2.5 のベクトル場に対する λ の条件を少し変えると M として 2 つの球面の直積の幾つかの連結和などを取ることができることが知られています[10,11]。

３．定義と基本的な性質

改めて横断的に複素解析的な葉層構造の定義から始めます。

定義 **3.1.** M を多様体とする。M の部分多様体への分割 $\mathcal{F}$ が M の横断的に複素解析的な葉層構造であるとは、M の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ と整数 p, q で、

1) 各 λ について $U_\lambda \cong V_\lambda \times W_\lambda$ (同相)。ここで、V_λ は $\boldsymbol{R}^p$ の開球で、W_λ は $\boldsymbol{C}^q$ の開球とする。
2) $\mathcal{F}$ の各部分多様体と U_λ の共通部分の連結成分は $V_\lambda \times \{w\}$, $w \in W_\lambda$ と書ける。
3) 座標変換 $\varphi_{\lambda\mu} : U_\mu \to U_\lambda$ は 1) の同相を通して

$$\varphi_{\lambda\mu}(x_\lambda, z_\lambda) = (\psi_{\lambda\mu}(x_\lambda, z_\lambda), \gamma_{\lambda\mu}(z))$$

と書ける。ここで、$\gamma_{\lambda\mu}$ は双正則局所微分同相。

が成り立つようなものが存在することである。p を葉層構造の次元、q を複素余次元と呼び、それぞれ $\dim \mathcal{F}$, $\mathrm{codim}_{\boldsymbol{C}} \mathcal{F}$ で表す。また、分割を与えるそれぞれの部分多様体のことを葉 (leaf) と呼ぶ。

2) の '$\boldsymbol{C}^q$' を '$\boldsymbol{R}^q$' で、3) の '双正則局所微分同相' を単に '局所微分同相' に置き換えれば通常の葉層構造 (以下、「実の場合」などと呼びます) の定

義になります。実の葉層構造を考える場合には、すべての $\gamma_{\lambda\mu}$ が $\boldsymbol{R}^q$ の向きを保つと仮定します[2]。また、このとき q を実余次元と呼び、$\mathrm{codim}_{\boldsymbol{R}}\mathcal{F}$ で表します。

定義 **3.2.** $T\mathcal{F}$ で TM の元のうち葉に接しているベクトル全体を表し、その複素化を $T_{\boldsymbol{C}}\mathcal{F}$ で表す。ここで z_λ を定義 3.1 のような局所的な横断方向の複素座標とし、E を局所的には $T\mathcal{F}$ と $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z_\lambda}}$ で $\boldsymbol{C}$ 上生成されるベクトル束とする。E は葉層が横断的に複素解析的であることから well-defined となり、さらにこれは対合的となる。即ち、$[E,E]\subset E$ が成り立つ。最後に、$T_{\boldsymbol{C}}M = TM\otimes\boldsymbol{C}$、$Q^{1,0} = T_{\boldsymbol{C}}M/E$ とする。

実の葉層に対しては $Q = TM/T\mathcal{F}$ とします。$\mathcal{F}$ がたまたま横断的に複素解析的であれば $Q\otimes\boldsymbol{C}\cong Q^{1,0}\oplus\overline{Q^{1,0}}$ です。二次特性類の定義に際して重要なことは E (複素の場合) や $T\mathcal{F}$ (実の場合) が対合的であるということです。二次特性類には様々なものがありますが、ここでは Godbillon-Vey 類と Bott 類の虚部の定義を紹介します。前者は一般の葉層の二次特性類の理論において、後者は横断的に複素解析的な葉層の特性類の理論において最も重要なものです。特に、複素余次元が 1 の葉層構造の二次特性類は Godbillon-Vey 類と Bott 類の虚部のみであることが知られています[1]。

以下に見るように、Godbillon-Vey 類と Bott 類の虚部はほぼ平行に定義されます。

定義 **3.3.**

1) 実の場合[14]:葉層構造が横断的に向き付け可能なことから $\boldsymbol{R}$-束 $\bigwedge^q Q^*$ ($q=\mathrm{codim}_{\boldsymbol{R}}\mathcal{F}$) は必ず自明になります。そこで ω を $\bigwedge^q Q^*$ の至る所零にならない切断とします。これは q-形式で $\ker\omega = T\mathcal{F}$ を満たします。ただし、$\ker\omega = \{X\in TM \,|\, \iota_X\omega = 0\}$ (ι_X は X による Lie 微分) です。すると Frobeniuns の定理から適当な 1-形式 η で $d\omega = -\eta\wedge\omega$ を満たすものが存在します。$(2q+1)$-形式 $\eta\wedge(d\eta)^q$ は閉じていて、かつ ω や η の選び方によらないコホモロジー類を決めることがわかります。そこで、

$$\mathrm{GV}_q(\mathcal{F}) = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^{q+1}\eta\wedge(d\eta)^q \in H^{2q+1}(M;\boldsymbol{R})$$

[2] 横断的に向き付け可能といいます。

として、これを Godbillon-Vey 類と呼びます。横断的に複素解析的な葉層を扱う場合にはすべて複素係数にしたほうが便利なことが多いのですが、その場合にも形式的にすべて複素化して考えると $H^{2q+1}(M;\boldsymbol{C})$ の元として Godbillon-Vey 類を得ます。これも実際には実係数コホモロジーの元です。

2) 横断的に複素解析的な場合：実のときと同様に $\boldsymbol{C}$-束 $\bigwedge^q(Q^{1,0})^*(q=\mathrm{codim}_{\boldsymbol{C}}\mathcal{F})$ を考えますが、これは定理 4.1, 4.2 からもわかるように必ずしも自明ではありません。自明でない場合には接続を定義して話を進めないといけませんが、ここでは簡単のためにこれは自明であると仮定します。すると $\bigwedge^q(Q^{1,0})^*$ の至る所零にならない切断 Ω を取ることができます。これは q-形式で、$\ker\omega=\{X\in T_{\boldsymbol{C}}M \,|\, \iota_X\Omega=0\}$（$\iota_X$ は X による Lie 微分）とすると $\ker\omega=E$ を満たします。すると Frobeniuns-Nierenberg の定理から、適当な 1-形式 H が存在し $d\Omega=-H\wedge\Omega$ を満たします[5]。$(2q+1)$-形式 $H\wedge(dH)^q$ は閉じていて、かつ Ω や H の選び方によらないコホモロジー類を決めることがわかります[12]。そこで、

$$\mathrm{Bott}_q(\mathcal{F})=\left(\frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^{q+1}H\wedge(dH)^q\in H^{2q+1}(M;\boldsymbol{C})$$

として、これを Bott 類と呼びます。Bott 類は $\bigwedge^q(Q^{1,0})^*$ が自明でないと定義できませんし、またこれは本質的に複素係数コホモロジーの元です[4]。一方、Bott 類の虚部はいつでも定義できて実係数コホモロジーの元になります。そこで、

$$\xi_q(\mathcal{F})=-2\,\mathrm{Im}\,\mathrm{Bott}_q(\mathcal{F})$$

とおいてこれを Bott 類の虚部と呼びます。係数が付いているのは本質的ではありません。実際には $\xi_q(\mathcal{F})$ は $\bigwedge^q(Q^{1,0})^*$ の接続を用いて定義され、上の等式は両辺が定義されるときに成り立ちます[1]。

４．Bott 類と Godbillon-Vey 類の基本的な性質

Bott 以降の複素二次特性類の研究の主なものとして例えば[13,8,9] などを挙げることができますが、横断的に複素解析的な葉層構造の Bott 類の虚部や Godbillon-Vey 類の性質はあまり調べられていません。ここでは Bott 類の虚部や Godbillon-Vey 類の基本的な性質をいくつか紹介します。

定理 4.1.

1) [4] $(S^3, \mathcal{F}_\lambda)$ を例 2.5 の葉層構造とすると、
$$\xi_1(\mathcal{F}_\lambda) = -2\,\mathrm{Im}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} + \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)\mathrm{vol}_{S^3},\ \mathrm{GV}_2(\mathcal{F}_\lambda) = 0$$
が成り立つ。

2) [13,2] 例 2.4 において $\Gamma\backslash G/\mathrm{SU}(2)$ が閉多様体であるとする。このとき $\pi : \Gamma\backslash G/U \to \Gamma\backslash G/\mathrm{SU}(2)$ を自然な写像とすると、$(\Gamma\backslash G/U, \mathcal{G}_\Gamma)$ について
$$\begin{aligned}\xi_1(\mathcal{G}_\Gamma) &= a_1\pi^*\mathrm{vol}_{\Gamma\backslash G/\mathrm{SU}(2)} + (\text{fiber のみに関する項}),\\ \mathrm{GV}_2(\mathcal{G}_\Gamma) &= a_2\mathrm{vol}_{\Gamma\backslash G/U}\end{aligned}$$
が成り立つ。ここで a_1, a_2 は余次元に依存するある定数。

例 2.4 は高次元化することができ、定理 4.1 は例 2.5 の次元の高い場合も合わせてほぼ同じ形で成立します。

Bott 類の虚部と Godbillon-Vey 類は以下のような関係にあります。

定理 4.2 [1]**.** $\mathcal{F}$ が横断的に複素解析的であれば
$$\mathrm{GV}_{2q}(\mathcal{F}) = \frac{(2q)!}{q!q!}\xi_q(\mathcal{F})(c_1(Q^{1,0}))^q$$
が成り立つ。ここで $c_1(Q^{1,0})$ は $Q^{1,0}$ の第 1 Chern 類。特に、Godbillon-Vey 類が非自明であれば $\bigwedge^q(Q^{1,0})^*$ は非自明である。

葉層の二次特性類の特徴として、葉層を適当な意味で連続的に変化させたときに連続的に変化するものがあることが挙げられます。例えば定理 4.1 とその後の注が示すように Bott 類の虚部は連続的に変化しますし、よく知られているように実の葉層構造のカテゴリーでは Godbillon-Vey 類は連続的に変化します。しかし、定理 4.2 から次のことがわかります。

定理 4.3 [2]**.** 横断的に複素解析的なカテゴリーでは Godbillon-Vey 類は剛的である。すなわち連続変形を許容しない。

定義 3.1 で、$\gamma_{\lambda\mu}$ 達は双正則局所微分同相であるとしましたが、さらに $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda$ に $\gamma_{\lambda\mu}$ の作用で不変な Hermite 計量が入っているとき、葉層は横断的に Hermite であるといわれます。これは実の場合の Riemann 葉層と呼ばれるものに相当します。次の性質は特に余次元 1 の場合に重要です。

定理 4.4. 横断的に複素解析的な葉層 $\mathcal{F}$ が横断的に Hermite であれば、$\xi_q(\mathcal{F}) = 0$ かつ $\mathrm{GV}_{2q}(\mathcal{F}) = 0$ が成り立つ。

5 . 余次元 1 の場合

特性類の性質を多様体や葉層構造の幾何学的構造と結び付けようと思うと、特性類が多様体の「どこにあるか」という問題は非常に重要です。この問題には幾つかの定式化がありますが、葉層の特性類の場合には局所化 (localization) と留数 (residue) という考え方が大切です。Bott 類の虚部の局所化は Godbillon-Vey 類のそれに比べ複雑になってしまうのでここでは割愛し、留数について紹介します。

留数それ自体について述べる前に、まず複素余次元 1 の葉層構造の研究において最も基本的である定理を少し簡略化した形で述べます。

定理 5.1 (Ghys–Gomez-Mont–Saludes[6])**.** M を閉多様体とし、$\mathcal{F}$ を M の複素余次元 1 の横断的に複素解析的な葉層構造とする。このとき、saturated closed set[3] J が自然に決まり、$F = M \setminus J$ 上では $\mathcal{F}$ は横断的に Hermite になる。

この J は葉層構造の Julia 集合と呼ばれ、葉層の横断的な複素構造の変形の有無に関連して定義されます。

留数は二次特性類の情報をある特定のコンパクト葉の近傍に寄せ集めることで定義され、Bott, Heitsch らによる二次特性類の連続変形の研究[8] や、Hurder による横断的に複素解析的な葉層構造の分類空間の研究[9] などに用いられました。一方、横断的に複素解析的な葉層構造には、すべての葉がコンパクトである場合を除いてそれほど多くのコンパクト葉は存在しないことが知られています。そこでコンパクト葉の近傍を用いる代わりに少し条件を緩めて saturated closed set の近傍を用いることにしても Bott-Heitsch のものとほぼ同様の性質を持つ留数を定義することができます[4]。この留数については例えば次が成り立ちます。

[3] 葉の和集合であるような閉集合を指します。saturated set の定まった日本語訳は筆者の知る限り無いようです。

[4] 実際、コンパクト葉の近傍に対してはこれらの留数は一致します[3]。

定理 5.2 [3]**.** J の十分小さい近傍 U に対し、ξ_1 の U に関する留数 $\mathrm{res}_U\xi_1(\mathcal{F})$ が $H^3_c(U;\boldsymbol{R})$ の元[5] として定まり、次の性質を満たす：

1) $\mathrm{res}_U\xi_1(\mathcal{F})$ は $\mathcal{F}$ の J の U での振る舞いのみ (より正確には $\mathcal{F}$ の J での芽) で定まる。
2) 自然な写像 $\iota : U \to M$ から誘導される写像 $\iota_* : H^3_c(U;\boldsymbol{R}) \to H^3(M;\boldsymbol{R})$ について、$\iota_*(\mathrm{res}_U\xi_1(\mathcal{F})) = \xi_1(\mathcal{F})$ が成り立つ。

定理 5.2 は簡単にいえば $\xi_1(\mathcal{F})$ の情報は J に集中するということを意味しています。ここでは留数の定義を述べる代わりに、2 節にある例のうち $\xi_1(\mathcal{F})$ が非自明なもの 2 つについてその計算を紹介します。

例 5.3. 例 2.5 の葉層 $(S^3,\mathcal{F}_\lambda)$ の持つ閉軌道は λ_1/λ_0 が有理数でなければ $(1,0)$ および $(0,1)$ を通る軌道のみです。これらを C_0, C_1 とし、U_i ($i=0,1$) を C_i の小さい近傍とすると

$$\mathrm{res}_{U_0}\xi_1(\mathcal{F}) = -2\,\mathrm{Im}\,\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\mathrm{vol}_{U_0}$$
$$\mathrm{res}_{U_1}\xi_1(\mathcal{F}) = -2\,\mathrm{Im}\,\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\mathrm{vol}_{U_1}$$

が成り立ちます。

留数は元の Bott 類の虚部の精密化といえます。例えば $|\lambda_0| = |\lambda_1|$ であるとすると $\xi_1(\mathcal{F}_\lambda) = 0$ ですが、$\lambda_0 = 1^{\frac{1}{3}} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\lambda_1 = 1$ の時など、C_0, C_1 の近傍での留数は零でないにもかかわらず全体としては ξ_1 が消えている例が存在します。この場合には局所的には Bott 類の虚部は非自明であるが、全体としてはその効果が打ち消しあっていると考えることができます。また、注 2.6 で言及したように、$(S^3,\mathcal{F}_\lambda)$ のようなタイプの葉層構造から切り貼りによって構成された葉層構造の Bott 類の虚部は留数を用いると簡単に計算することができます。

例 5.4. 例 2.5 の葉層 $(\Gamma\backslash G/U, \mathcal{G}_\Gamma)$ の場合には $J = \Gamma\backslash G/U$ となることが Mostow Rigidity と $\boldsymbol{C}P^1$ の複素構造の一意性から容易に分かります。ですからこの場合には留数は $\xi_1(\mathcal{F})$ そのものになります。

[5] $H^*_c(U;\boldsymbol{R})$ で $\boldsymbol{R}$-係数のコンパクト台のコホモロジーを表すことにします。

定理 5.2 が示すように、J の近傍には葉層構造の性質のうち特性類で捉えられるものが集中しています。実余次元 1 の葉層構造の場合には、ホロノミーがない葉層構造の Godbillon-Vey 類は自明であることが以前から知られています。このことを踏まえると次の問いは特に基本的です。

問い **5.7** [6]**.** J は非自明なホロノミーを持つ葉の閉包か？

今のところこの問いの答えは全くわかりません。

References

1. T. Asuke, *On the real secondary classes of transversely holomorphic foliations*, Ann. Inst. Fourier **50,** No. 3 (2000), 995–1017.
2. ———, *The Godbillon-Vey class of transversely holomorphic foliations*, preprint (2000).
3. ———, *Localization and Residue of the Bott class*, preprint (2001).
4. R. Bott, S. Gilter, I. M. James, *Lectures on Algebraic and Differential Topology*, Lecture Notes in Mathematics, No. 279, Springer-Verlag, 1972.
5. T. Duchamp and M. Kalka, *Deformation Theory for Holomorphic foliations*, J. Diff. Geom. **14,** (1979), 317–337.
6. E. Ghys, X. Gomez-Mont, J. Saludes, *Fatou and Julia Components of Transversely Holomorphic Foliations*, preprint (2000).
7. A. Haefliger, *Deformations of transversely holomorphic flows on spheres and deformations of Hopf manifolds*, Composit. Math. **55** (1985), 241–251.
8. J. L. Heitsch, *A Residue Formula for Holomorphic Foliations*, Michigan Math. J. **27** (1980), 181–194.
9. S. Hurder, *Independent Rigid Secondary Classes for Holomorphic Foliations*, Invent. Math. **66** (1982), 313–323.
10. J.-J. Loeb and M. Nicolau, *Holomorphic flows and complex structures on products of odd dimensional spheres*, Math. Ann. **306,** (1996), 781–817.
11. S. López de Medrano and A. Verjovsky, *A new family of complex, compact, non-symplectic manifolds*, Bol. Soc. Bras. Mat. **28** (1997), 253–269.
12. H. V. Pittie, *Characteristic classes of foliations*, Research Notes in Mathematics; 10, Pitman Publishing, 1976.
13. O. H. Rasmussen, *Exotic Characteristic Classes for Holomorphic Foliations*, Invent. Math. **46** (1978), 153–171.
14. 田村一郎, 葉層のトポロジー, 数学選書, 岩波書店, 1976.

1-3-1 Kagamiyama, Higashi-Hiroshima, Hiroshima 739-8526, Japan
E-mail address: asuke@math.sci.hiroshima-u.ac.jp