微分方程式のつくるかたち

足助 太郎

２０２０年１１月２１日〜２３日*

於 2020 年度公開講座「かたち、づくる」

微分方程式からは様々な「かたち」が定まる．あるものは見たままでわかりやすく，またあるものは見えづらい．この講義では，微分方程式，とりわけ全微分方程式と呼ばれるものが定める「かたち」について述べる．

1.　いくつかの微分方程式

微分方程式は物体の運動や，気体や液体の濃度の変化など，何らかの変化を表すのに良く用いられる．簡単なところだと，物体の自由落下は，いろいろ定数を簡易にすると $\dfrac{d^2y}{dx^2} = a$（a は定数）という方程式で表される．あるいは，電磁気を扱うと $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -ay$（a は正の定数）という形の方程式が良く現れる[†1]．このほかにも，例えば建物などの形がどのようになって安定するかといったことも微分方程式を用いて調べることができる．これらの形は見て取れるものである．ところで，微分方程式をよく観察することにより，このような現象の背後にある，いわば原理のようなものが分かることがある．このような場合には，微分方程式は何らかの「かたち」を現象に与えていて，これに従って目に見える運動などが実際に起きると考えることができる．ここでは，このような「かたち」が平面や空間にどのようにつくられるか，数学的な部分について述べる．

まず，微分方程式の表し方について述べる．函数の微分は上と同様に，$\dfrac{d}{dx}$ などを用いて表す．f を x, y の函数（x, y を変数とする函数）とする．y が x の函数だとすると，x に応じて二つの値

$$\frac{dy}{dx}(x) \quad \text{と} \quad f(x, y(x))$$

を考えることができる．これらが常に等しいとすると，x によらず

$$\frac{dy}{dx}(x) = f(x, y(x)) \tag{1.1}$$

が成り立つ．これを函数の関係式（方程式）に直したものが，もっとも基本的な微分方程式である．

*11 月 4 日作成.

[†1] それぞれ解は二次函数，三角函数を用いて表される．

定義 1.2. f を x, y の函数とする．

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1.3}$$

と表される，x の函数 y についての微分方程式を**正規形**の微分方程式と呼ぶ．

方程式 (1.3) の解は，x の函数 y であって，任意の x について等式 (1.1) が成り立つものである．

例 1.4. 1) $\dfrac{dy}{dx} = xy$ とすると，これは正規形の微分方程式である．解は，$c \in \mathbb{R}$ を定数として[†2]，$y(x) = ce^{\frac{1}{2}x^2} = c\exp\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)$ で与えられる．

2) $\dfrac{dy}{dx} = y^2$ とすると，これも正規形の微分方程式である．解は，$y(x) = \dfrac{-1}{x+c}$，ただし $c \in \mathbb{R}$ は定数，あるいは $y(x) = 0$（常に 0 に等しい）をつなぎ合わせたもの，例えば

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

として与えられる．なお，$x = 0$ のとき，$y(0)$ を考えるかどうかはやや難しい問題なので，ここでは考えないことにする．

3) 微分方程式は正規形のものだけではない．例えば $x\dfrac{dy}{dx} = y$ とすると，これは正規形ではない微分方程式である．$x \neq 0$ の範囲で，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$ と書き換えると，こちらは正規形の微分方程式である．この方程式の解は $y(x) = cx$，ただし，$c \in \mathbb{R}$ は定数，で与えられる．この場合にも，解の定義域を例えば $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ とすると，解は $y(x) = cx$ をつなぎ合わせたものになる．このようなこともやや難しい問題なので，ここではこれ以上考えないことにする．

正規形の微分方程式 (1.3) を初めとする，いろいろな微分方程式において，条件 $y(x_0) = y_0$ を課すことを**初期条件**あるいは**拘束条件**を定める，などという．方程式 (1.3) は，f を連続とすると，任意の初期条件に関して，x が x_0 からあまり離れていない範囲で定まった解を常に持つことが知られている．また，f にもう少し条件を課すと解は一つであることも知られている．これらのことは，解のグラフを考えると自然なことに思える．一般に，x の函数 y について，そのグラフ $Y(x) = (x, y(x))$ を考える[†3]．Y の $x = x_0$ における接線は

$$y = \frac{dy}{dx}(x_0)(x - x_0) + y_0$$

により与えられる．このことを踏まえると，方程式 (1.3) は解 y のグラフの，x における接線の傾きが $f(x, y(x))$ に等しい，という条件に読み替えることができる．つまり，方程

[†2] $\mathbb{R}$ で実数全体のなす集合を表す．
[†3] 描かれる図形だけではなく，それを定める函数もグラフと呼ぶことにする．

式 (1.3) は解のグラフの接線の傾きを xy-平面上で一斉に与えている．そこで，この傾きをうまく繋いでいけば解のグラフが得られると考えられる．実際に方程式 (1.3) はこのように考えて解くことができる[†4]．

2.　全微分方程式

前節では微分方程式を解のグラフを用いて意味づけてみた．ところで，解のグラフは $Y(x) = (x, y(x))$ という特別な形をしている．これをもう少しおおらかに，xy-平面内の曲線と考えてみる．すると，例えば半径 1 の円周は $(\cos t, \sin t)$ と表すことができて，自由度が大分上がる．改めて γ を xy-平面上の曲線とする．曲線上の点は，その x 座標と y 座標を指定すれば定まる．そこで，$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ と表わして，t を動かすと二つの函数 γ_1, γ_2 が得られる．言い換えれば，γ は二つの函数 γ_1, γ_2 を用いて $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ と表すことができる．すると，曲線 γ の速度ベクトルは $\left(\dfrac{d\gamma_1}{dt}(t), \dfrac{d\gamma_2}{dt}(t)\right)$ で与えられる．これの傾きは $\dfrac{d\gamma_2}{dt}(t)\Big/\dfrac{d\gamma_1}{dt}(t)$ に等しい．そこで，曲線 γ の速度ベクトルについて，$\dfrac{d\gamma_1}{dt}(t)$ を取り出す操作を dx，$\dfrac{d\gamma_2}{dt}(t)$ を取り出す操作を dy で表すことにしてみる．すると，傾きは $\dfrac{dy}{dx}$ で与えられて，前節の話とうまく整合的になりそうである．そこで，$\dfrac{dy}{dx}$ という記号に二重の意味を与えることにする．第一は，普段考えている y の x による微分，第二は，曲線 γ が与えられた時に，$\dfrac{d\gamma_2}{dt}\Big/\dfrac{d\gamma_1}{dt}$ を考えるという意味である．ただし，二番目の場合には $\dfrac{d\gamma_1}{dt}$ は考えている範囲では 0 にならないとする．さて，曲線 γ について，方程式 (1.3) に対応する方程式を考える際に，わざわざ dx で割る必要は特にない．それどころか，例えば $\gamma(t) = (x_0, t)$ で定まる曲線のように，$\dfrac{d\gamma_1}{dt}$ が常に 0 に等しいことも有り得る．そこで，方程式 (1.3) を

$$f dx - dy = 0$$

と書き換える[†5]．曲線 γ がこの方程式の解であることは，

$$f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\frac{d\gamma_1}{dt}(t) - \frac{d\gamma_2}{dt}(t) = 0$$

が t によらず成り立つこととすれば，方程式の解であるような γ の速度ベクトルについて，

$$\left(\frac{d\gamma_1}{dt}(t), \frac{d\gamma_2}{dt}(t)\right) = \left(\frac{d\gamma_1}{dt}(t), f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\frac{d\gamma_1}{dt}(t)\right) = \frac{d\gamma_1}{dt}(t)(1, f(\gamma_1(t), \gamma_2(t)))$$

が成り立つ．このベクトルは 0 であるか，あるいは傾きが $f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ に等しい．解である曲線 γ がグラフだとすると $\gamma_1(t) = t$ が成り立つから，$\dfrac{d\gamma_1}{dt}$ は常に 1 に等しい．従って

[†4] コーシー（Cauchy）の折れ線法と呼ばれる．ほかの解き方もある．

[†5] ここで，方程式 (1.3) における $\dfrac{dy}{dx}$ は本当は第一の意味で考えていたのを，第二の意味にすり替えている．

速度ベクトルが 0 となることはなく，その傾きは f で与えられ，期待通りである．そこで，これらのことを一般化して次のように定める．

定義 2.1. x, y の函数 f, g を用いて

$$fdx + gdy = 0 \tag{2.2}$$

と表される式を，曲線の速度ベクトルに関する方程式と考えて**全微分方程式**と呼ぶ．曲線 $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ が方程式 (2.2) の解であることは，

$$f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\frac{d\gamma_1}{dt}(t) + g(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\frac{d\gamma_2}{dt}(t) = 0 \tag{2.3}$$

が t によらず成り立つことと定める．また，このとき γ を**解曲線**と呼ぶ．

特に $g = -1$ の場合には方程式 (2.2) は方程式 (1.3) に対応する．一般に，g が 0 にならない範囲では方程式 (2.2) は方程式

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f}{g} \tag{2.4}$$

に対応する．実際，この方程式は正規形なので，x の動く範囲が狭ければ解を持つ．それを z とすると，

$$\frac{dz}{dx}(x) = -\frac{f(x, z(x))}{g(x, z(x))}$$

が成り立つ．函数 z のグラフを Z とする．つまり，$Z(x) = (x, z(x))$ とする．すると，Z の x における速度ベクトルは $\left(1, \dfrac{dz}{dx}(x)\right)$ に等しいから，

$$f(x, z(x))1 + g(x, z(x))\frac{dz}{dx}(x) = f(x, z(x)) - g(x, z(x))\frac{f(x, z(x))}{g(x, z(x))} = 0$$

が成り立つ．従ってグラフ Z は曲線とみなせば方程式 (2.2) の解である．

例 2.5. $a \in \mathbb{R}$ とし，方程式

$$axdx + ydy = 0 \tag{2.6}$$

を考えてみる．ただし，$(x, y) \neq (0, 0)$ とする．$y \neq 0$ の範囲では，この方程式は

$$\frac{dy}{dx} = -a\,\frac{x}{y}$$

に対応する．これの解は $y(x) = \pm\sqrt{c - ax^2}$，ただし $c \in \mathbb{R}$，で与えられる．全微分方程式の解（解曲線）は，例えば $\gamma(t) = (t, \pm\sqrt{c - at^2})$ で与えられる．これらを少し大雑把に整理すると $ax^2 + y(x)^2 = c$ と書き換えることができる．さて，a, c が一定の条件[†6]をみた

[†6] $a > 0$ ならば $c > 0$，$a = 0$ ならば $c \geq 0$，$a < 0$ ならば $c \in \mathbb{R}$．ただし $c = 0$ の場合には重なった，あるいは交点を持つ二直線が現れる．

せば y は曲線を表す．これらの曲線は $a>0$ ならば楕円，$a=0$ ならば直線，$a<0$ ならば双曲線あるいは直線である．これら三つの曲線はずいぶん形が異なるように見える．一方，方程式 $axdx+ydy=0$ は，解曲線の接線を表している．これらの接線は a が変化してもあまり変化しないから，三つの曲線はやはり近いはずである．このことを観察するには，まず a を固定し，c を変化させてグラフを描いたものを考えて，次いで a を変化させていくと良い．$a>0$ のうちは，c を変化させると同心円のような図形（実際には楕円）が得られる．a が小さくなるにつれて，この楕円は横長になっていって，図形全体は水平な平行線のようになっていく．$a=0$ になると，実際に図形全体は水平な平行線である．$a<0$ になると，c を固定するごとに非常につぶれた双曲線が四つ組になった図形あるいは，$y=\pm\sqrt{-a}\,x$ で与えられる二本の直線が現れる．c を変化させると，双曲線は少し移動するが相変わらずつぶれていて，この二本の直線が漸近線である．これら全体のなす図形は，多少変なところはあるが，概ね水平な平行線に近い．a が更に小さくなる（絶対値が大きくなる）と，つぶれ方は緩和されていき，次いで縦につぶれた双曲線に変化していく[†7]．楕円と双曲線はいわば親戚であるかのように扱われることが少なくない．ここで行ったように，接線を指定してこれらを描くという観点からもこれらは親戚のように考えることができる．

例 2.5 において，方程式 (2.6) の解 y を表すのに根号を用いたが，$ax^2+y^2=c$，とした方が簡潔である．これは全微分方程式 (2.6) の解を表しているので，これらの式には関係があると考えられる．そこで，とりあえず $P(x,y)=ax^2+y^2-c$ としてみて，$P(x,y(x))$（これも P で表してしまう）を x について微分してみる．すると，

$$\frac{dP}{dx}(x)=2ax+2y(x)\frac{dy}{dx}(x)$$

が成り立つ．これは方程式 (2.6) にかなり近い．実際，dx を右辺に掛けて良いことにすると，$2axdx+2ydy$ が得られ，これは方程式 (2.6) の左辺の 2 倍である．この「P を x について微分して dx を掛けて得られる式」を単に dP で表すことにする．今の場合には

$$dP=2axdx+2ydy$$

である（変数 x は省略した）．一般に，全微分方程式 (2.2) について，x,y の函数 P が性質

dP が方程式の左辺と一致する．

をみたすと，$P(x,y)=c$（c は定数）を y について解くと解が得られることを示すことができる[†8]．このような P は方程式 (2.2) の左辺の**ポテンシャル**，**第一積分**などと呼ばれる．今の例では $P(x,y)=(ax^2+y^2-c)/2$ とすれば，P がポテンシャルである．一般の全微分方程式 (2.2) について，ポテンシャルがどのように得られるか考えてみる．先の議論を

[†7] a を正の大ききな値にしていくと，楕円がだんだん縦につぶれていく．

[†8] 厳密には f,g が同時には 0 にならない，という条件が要る．

踏まえて z を方程式 (2.4) の解とし，

$$P(x,y) = -z(x) + y$$

と定める．すると，$P(x,y(x)) = -z(x) + y(x)$ により定まる函数 P について

$$\frac{dP}{dx}(x) = \frac{f(x,z(x))}{g(x,z(x))} + \frac{dy}{dx}(x)$$

が成り立つ．右辺に dx を掛けると $\dfrac{f}{g}dx + dy$ が得られる．従って，P は方程式 (2.2) の左辺そのもののポテンシャルではないが，g で割ったもののポテンシャルとなっている．一般に,「二変数の全微分方程式について，ポテンシャルそのものは必ずしも見つからないが函数倍のずれを許せば必ず見つかる」ことが示せる[†9]．これらは次のように呼ばれる．

定義 2.7. 全微分方程式 (2.2) において，函数 μ と P について

$$dP = \mu(fdx + gdy)$$

が成り立つとする．このとき，μ を**積分因子**，P を $\mu(fdx + gdy)$ の**ポテンシャル**，第一積分と呼ぶ.

一般には積分因子もポテンシャルも一意的ではない．仮に先の求め方に従うのであれば，$\mu = 1/g$ が積分因子で，$-F + y$ が $\mu(fdx + gdy)$ のポテンシャルであるが，求め方によっては別の積分因子とポテンシャルが見つかる．

問 2.8. y を微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$ の解とし，$Y(x) = (x, y(x))$ を y のグラフとする．変数変換 $x = x(t)$ を施し，$z(t) = y(x(t))$，$Z(t) = Y(x(t)) = (x(t), y(x(t)))$ とする．

1) z は一般には方程式 $\dfrac{dz}{dt} = f(t,z)$ の解ではないことを，例を挙げることにより示せ．

2) Y，Z はいずれも全微分方程式 $fdx - dy = 0$ の解であることを示せ.

注：dx，dy は速度ベクトルの x 成分，y 成分をそれぞれ取り出す操作で，曲線の変数が何であるかとは関係がない．また，Z の速度ベクトルを求めるのには t で微分する必要がある．

3. 三変数の全微分方程式

ここまでは x, y を変数として，xy-平面上の曲線と微分方程式，特に全微分方程式について話をしてきた．ここでは変数を増やして三変数の全微分方程式を考える．つまり，f, g, h を x, y, z の函数とし，方程式

$$fdx + gdy + hdz = 0, \tag{3.1}$$

[†9]方程式をもっと一般の空間で考えると，話が変わってくる．

について，これの解とは何か，また解が xyz-空間内のどのような図形を定めるか考えてみる．まず解が何であるか調べるために，$z = z_0$ として得られる平面で全体を切ってみる．こうすると z は定数とみなせて変数が一つ減り，平面 $z = z_0$ 上で全微分方程式が与えられたことになる．この，平面上の方程式の解は曲線だと考えられる．また，z_0 を動かせば，曲線が空間内を移動していって，曲面が得られると考えられる．曲面は，平面のように二方向に広がりを持つので，二変数函数を用いて表されると考えられる．例えば $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ で表される球面については，$\varphi(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$ とすると，全体は無理であるが，半分は表すことができる．また，この場合には $x^2 + y^2 \leq 1$ とする必要がある．あるいは $\varphi(\theta, \rho) = (\sin\theta\cos\rho, \sin\theta\sin\rho, \cos\theta)$ としてもよい．今度は球面全体を表すことができるが，例えば $\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$ が成り立ち，全体が何通りにも表されるので，それを避けたければ θ, ρ の範囲を制限する必要がある．ともあれ，二変数函数を用いれば曲面を表すことはできそうなので，次のように定める．

定義 3.2. φ を二変数（u, v とする）の，$\mathbb{R}^3$（xyz-空間）に値をとる函数とする．このとき，$\varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v))$ と表す．φ が方程式 (3.1) の解であるとは，考えている範囲で，任意の u, v について条件

1) 等式

$$
\begin{aligned}
f(\varphi(u,v))\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v) + g(\varphi(u,v))\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u,v) + h(\varphi(u,v))\frac{\partial \varphi_3}{\partial u}(u,v) = 0, \\
f(\varphi(u,v))\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v) + g(\varphi(u,v))\frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u,v) + h(\varphi(u,v))\frac{\partial \varphi_3}{\partial v}(u,v) = 0
\end{aligned}
$$

が成り立つ，および，

2) 二つのベクトル

$$
\begin{gathered}
\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v), \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u,v), \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}(u,v)\right), \\
\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v), \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u,v), \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}(u,v)\right)
\end{gathered}
$$

が平行とはならない．

が成り立つことを言う．

注 3.3. 1) 定義 3.2 に現れる $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u}$ は，v を定数とみなして u の函数として φ_1 を微分したものである．また，$\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v}$ は，u を定数とみなして v の函数として φ_1 を微分したものである．ほかも同様である．

2) 定義 3.2 の条件 2) は φ が曲面を表すことを保証している．つまり，φ で表される図形が例えば一点になったり，曲線になったりするようなことを防いでいる．

3) 定義 3.2 の条件 1) は φ が表す曲面が方程式 (3.1) の解である，ということの実質的な部分である．

第 2 節で見たように，二変数の場合には，全微分方程式 (2.2) の解であるような曲線は必ず存在した[†10]．三変数の場合の方程式 (3.1) については，これの解となっている曲面が存在する場合もしない場合もある．ここでは両極端な二つの場合について述べる．

まず最初に，曲面について次のことに注意しておく．曲面が二変数函数 φ を用いて表されるとし，座標を用いて $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ と表す．ここで，φ に少し条件を課すと，変数変換 $(u, v) = (u(t, s), v(t, s))$ により

$$\varphi(u(t, s), v(t, s)) = (t, \varphi_2(u(t, s), v(t, s)), s)$$

とできることが示せる．ここでは二番目の函数を残したが，一番目，あるいは三番目のどちらかでも良いとすると，t, s があまり変化しないとすれば必ずこのようにできることが定義 3.2 の条件 2) を用いて示される[†11]．そこで，以下ではあらかじめ変数変換して $\varphi(u, v) = (u, \varphi_2(u, v), v)$ と仮定する．

例 3.4. 1) 方程式

$$xdx + ydy + zdz = 0 \tag{3.5}$$

を考えてみる．ただし，$(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ とする．まず v を固定して u を変数と考える．すると，t を変化させた際の φ の速度ベクトルは

$$\left(1, \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u, v), 0\right)$$

に等しい．従って，定義 3.2 の条件 1) の式により

$$u1 + \varphi_2(u, v)\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u, v) = 0$$

が成り立つ．v を定数とみなした上でこれを解くと，$\varphi_2(u) = \pm\sqrt{c - u^2}$，ただし c は定数，を得る．次に v も変化させてみる．この時，c は v の変化に伴って一般には変化する．従って，u を定数として v を変化させたときの φ の速度ベクトルは

$$\left(0, \pm\frac{1}{2\sqrt{c - u^2}}\frac{dc}{dv}, 1\right)$$

に等しい．そこで，定義 3.2 の条件 2) の式を用いると

$$\frac{dc}{dv} + 2v = 0$$

[†10] 正確には，f と g が同時には 0 にならない，という条件が要る．

[†11] 逆函数定理を用いる．参考書などでは陰函数定理と一緒に扱われることが多い．

を得る．従って $c = -v^2 + d$，d は定数が成り立つ．これらのことから，

$$\varphi(u,v) = (u, \sqrt{d - u^2 - v^2}, v)$$

が成り立つ．正確にはもう少し議論が要るが，実際に φ が $y \neq 0$ の範囲の解であることが分かる．$y = 0$ の場合には，$x \neq 0$ の場合と $z \neq 0$ の場合に話を分けて，同様の結果が得られる．いずれの場合にも，$P(x,y,z) = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 - d)$ とすると，P がポテンシャルであることが分かる．なお，$P = 0$ は球面を表すが，方程式 (3.5) を例 2.5 と同様に変化させると，双曲面などが現れる．

2) 方程式

$$zdx - dy = 0 \tag{3.6}$$

を考えてみる．1) と同様に，まず v を固定して考えると

$$v1 - 1\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u,v) = 0$$

を得る．v は定数と考えているので，$\varphi_2(u,v) = vu + c$，c は定数，を得る．従って $\varphi(u,v) = (u, vu + c, v)$ が成り立つ．今度は u を定数と考えると，v を変数と考えた場合の φ の速度ベクトルは $\left(0, u + \dfrac{dc}{dv}, 1\right)$ だから

$$v0 - 1\left(u + \frac{dc}{dv}\right) = 0$$

を得る．従って，$c = -uv + d$，d は定数，が成り立つ．すると $\varphi(u,v) = (u,d,v)$ が成り立つ．改めて定義 3.2 の 1) の最初の式が成り立つか確認してみると，

$$v1 - 0 = 0$$

が成り立たないといけないが，これは $v = 0$ の場合にしか成り立たない．$(u, v, \varphi_3(u,v))$，$(\varphi_1(u,v), u, v)$ の形の函数で与えられる曲面を考えても同様にうまく行かないことが分かる．このように，この方法では方程式 (3.6) からは曲面が得られない．

全微分方程式は二変数の場合には曲線を定めた．また，三変数の場合でも，方程式 (3.5) は曲面を定めた．これらは具体的な「かたち」である．一方，方程式 (3.6) からは曲面は得られなかった．これはやり方が悪いのではなく，方程式 (3.6) には定義 3.2 の意味での解は存在せず，曲面を定めないことが知られている．このような状況は，二変数の全微分方程式は f, g が同時に 0 にはならないという条件の下で必ず曲線を定めることと大きく異なる．f, g, h が一斉に 0 になることはない，という条件の下で方程式 (3.1) が曲面を定めるための必要十分条件は，Frobenius の定理という形で知られている．Frobenius の定理を述べるのには準備がずいぶん要るので，ここでは割愛する．方程式 (3.6) のような，曲面を定

めない全微分方程式は異常なもので基本的には考えなくて良い，としたいところであるが，実際には全くそうではなく，方程式 (3.6) は $\mathbb{R}$ 上の函数を微分に着目して統一的に理解しようとすると必然的に現れる方程式である．大分難しくなる（最後に注として述べる）が，方程式 (3.6) は $\mathbb{R}$ 上の函数全体のなす空間[†12]に**接触構造**と呼ばれる「かたち」を定める．接触構造は $\mathbb{R}^3$ だけではなく，ほかの色々な空間の性質を調べたりする際に用いられ，実は非常に基本的な「かたち」である．一方，方程式 (3.5) は**葉層構造**と呼ばれる「かたち」を xyz-空間に定める．ここでは，原点を中心とする同心球全体が葉層構造である．このように，具体的な形を定める全微分方程式はいかにも自然で，こちらも考えないわけにはいかない．三変数の全微分方程式を考えるのには，このような難しさがある．

4.　少し進んだ注

ここに述べるのは，参考文献よりも更に進んだ，専門的なことがらを含む注である．気楽に流し読みすればよい．

注 4.1. f を実数値函数とする．そして，f 自体の振る舞いに加えて，f の微分の振る舞いも調べたいとする．f を調べるのにはグラフをよく用いる，つまり $F(x) = (x, f(x))$ で定まる函数や，xy-平面内で F が表す図形を考える．このことを踏まえて，f の微分まで含めた「グラフ」を考えてみる．つまり，$F(t) = (t, f(t), f'(t))$，ただし $f'(t) = \dfrac{df}{dt}(t)$，により定まる函数を考える．この F は xyz-空間内のグラフであるが，曲線と考えることもできる．そこで，敢えて $F(t) = (F_1(t), F_2(t), F_3(t))$ と表し，速度ベクトル $F'(t) = (F_1'(t), F_2'(t), F_3'(t))$ を考える．これらの x 成分，y 成分，z 成分を取り出す操作をそれぞれ dx, dy, dz と表したので，例えば $dx(F'(t)) = F_1'(t)$ が成り立つ．さて，$F'(t)$ は実際に計算することができて，$F'(t) = (1, f'(t), f''(t))$ が成り立つ．すると，$dx(F'(t)) = 1$，$dy(F'(t)) = f'(t)$，$dz(F'(t)) = f''(t)$ が成り立つ．従って，曲線 F に沿って $zdx - dy = 0$ が成り立つ．実際，方程式 (2.2) について条件 (2.3) を考えたのと同様にすると，曲線 F に沿って $zdx - dy$ を計算するには $F_3(t)dx(F'(t)) - dy(F'(t))$ を計算すれば良く，これは $f'(t)1 - 1f'(t) = 0$ に等しい．つまり，函数 f から定まる xyz-空間の曲線に沿って，$zdx - dy = 0$ が恒等的に成り立つ．一方，例えば $\zeta(t) = (t, t, t)$ とすると ζ も xyz-空間内の曲線である．ところが，ζ に沿って $zdx - dy$ を計算すると，$t1 - 1$ となり，これは $t \neq 1$ ならば 0 ではない．つまり，ζ に沿って $zdz - dy$ は恒等的には 0 ではない．従って，ζ は xyz-空間内の曲線ではあるが，函数 f を用いてグラフ F の形に表すことはできない．このように，xyz-空間を，函数の一次の微分までを含めたグラフを表すための空間と考えると，全微分方程式 $zdx - dy = 0$ がみたされることが大前提となる．別な言い方をすれば，この，f のグラフを表すための xyz-空間は単に実数を三つ並べて得られるいつもの xyz-空間ではなく，全微分方程式があ

[†12] より正確には 1-jets 全体のなす空間である．これは $\mathbb{R}^3$ と同一視できるが，線型空間ではない．

らかじめ備わっている空間，ということになる．このようなことを空間が**構造**，幾何構造を持つ，などと言う．構造にはそれぞれ名前がついていて，ここでの構造は接触構造と呼ばれる．接触構造の一般的な定義を述べるのには準備が要るのでここでは省略する．

注 4.2. 全微分方程式の左辺に現れた $fdx + gdy$ や $fdx + gdy + hdz$ は **1-形式**，あるいは微分 1-形式と呼ばれるものである．これらは見かけ上，積分 $\int f(x)dx$ の「中身」に酷似している．実際，この積分は「1-形式 fdx の積分」と考えることができて，この講義の話などとも深く関連する．例えば $f(x) = x^2$ とし，$\int_0^2 f(x)dx$ を考えてみる．いつものように計算すれば

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

を得る．一方，1-形式 x^2dx を考えてみる．変数 x が 0 から 2 まで変化するというのは，例えば x 軸上の点が速度 1 で 0 から時間 2 だけ移動する（結果として 2 まで移動する）と考えることができる．これは曲線（函数）を用いると $\gamma(t) = 2t$，ただし $0 \leq t \leq 2$，と表すことができる．ここまでに述べたように考えると，γ に沿って x^2dx は $\gamma(t)^2 dx(\gamma'(t)) = t^2$ に等しい（今は x 軸しかないので，γ の速度ベクトルは $\gamma'(t)$ に等しく，その x 成分を取り出せば $\gamma'(t) = 1$ が得られる）．これを 0 から 2 まで足し上げるのに積分を用いることにすれば，上と同様の計算により値 $\frac{8}{3}$ を得る．本当にこれで良いのか，色々確かめないといけないことがあるが，この考え方は普段考えている積分と整合的であることが示される．一つ傍証を挙げる．点が x 軸上を 0 から 2 まで移動するのに，速度 2 で時間 1 移動しても構わない．これは $\zeta(s) = 2s$，ただし $0 \leq s \leq 1$，と表すことができる．このとき，ζ に沿って x^2dx を考えると，これは $\zeta(s)^2 dx(\zeta'(s)) = (2s)^2 2 = 8s^2$ に等しい．これを 0 から 1 まで，積分を用いて足し上げれば $\int_0^1 8s^2 ds = \frac{8}{3}$ と，いつもと同じ結果が得られる．これらのことは，大学の講義では例えば「常微分方程式」「ベクトル解析」，場合によっては「複素解析」などで別々に扱われる[†13]．

問 4.3. γ が 0 から 2 までの x 軸上での移動を表すとする．より正確に，函数 γ は $\gamma(0) = 0$，$\gamma(1) = 2$ をみたす函数とし，$0 \leq t \leq 1$ の範囲を考える．ただし，γ の値は 0 から 2 の範囲をはみ出しても良く，例えば $\gamma(1/2) = -1$ が成り立ったりしても良いとする．この時，$dx(\gamma'(t)) = \gamma'(t)$ が成り立つので，γ に沿って x^2dx は $\gamma(t)^2\gamma'(t)$ に等しい．さて，

$$\int_0^1 \gamma(t)^2\gamma'(t)dt = \frac{8}{3}$$

が成り立つことを示せ．

参考文献

[1] 微分方程式の基礎，笠原 晧司著，朝倉書店，1982，ISBN 978-4-254-11415-7.

[†13] 講義の名前はもちろんその場，時々による．

[2] 曲面と曲線の微分幾何 (改訂版)，小林 昭七著，裳華房，1995，ISBN 978-4-7853-1091-2.

[3] 多様体入門（新装版），松島 与三著，裳華房，2017，ISBN 978-4-7853-1317-3.

微分方程式に関しての詳しいことは [1] を参照すると良い．大学一回生程度の微積分の知識が要るので，未習であればどこかから借りてきて眺める位で良い†14．また，曲面や曲線に関しては [2] に良く書かれている．こちらは高校程度の微積分の知識があれば式は追えるが，今度は扱われている図形の描像を追うのが難しい．これは図を沢山描いてみるなどして慣れるしかない．これらの文献は一見全く異なることについて述べていて，内容を結びつけるのは最初は難しいかも知れないが，だんだんできるようになると思う．最後の [3] はより進んだ教科書で，大学二回生を修了した程度の数学の知識が要る．例えばこの講義で現れた dx, dy や Frobenius の定理についてはこれを参照すると良い．元々は古い本（1965年出版）なので†15記述はやや古風であるが，読みやすさは新しい本に劣らないと思う．

†14さっぱり分からなくても気にしなくて良い．
†15実は [2] も元々は 1977 年の出版である．