

曲線をよくみる

2008年度公開講座「図形をみる」

足助 太郎

2008年11月22日

(2013年4月16日改訂)

1 曲線とは？

目に見える図形は多々ありますが，ここでは平面内（平面上）の曲線について考えてみます．そうは言うものの，そもそも曲線とは何でしょうか．例えば円や放物線，双曲線は曲線です．懸垂線やサイクロイド，カージオイド（カルジオイド）と呼ばれる曲線もあります．直線は曲がってはいませんが，これらの曲線とよく似ているので曲線と言って良いでしょう．8の字のように交差していたり，Yの字のように枝分かれしている図形は曲線のような，そうでないような何とも言い難いところです．ここでは話を単純にするためにこのような図形は考えないことにします．

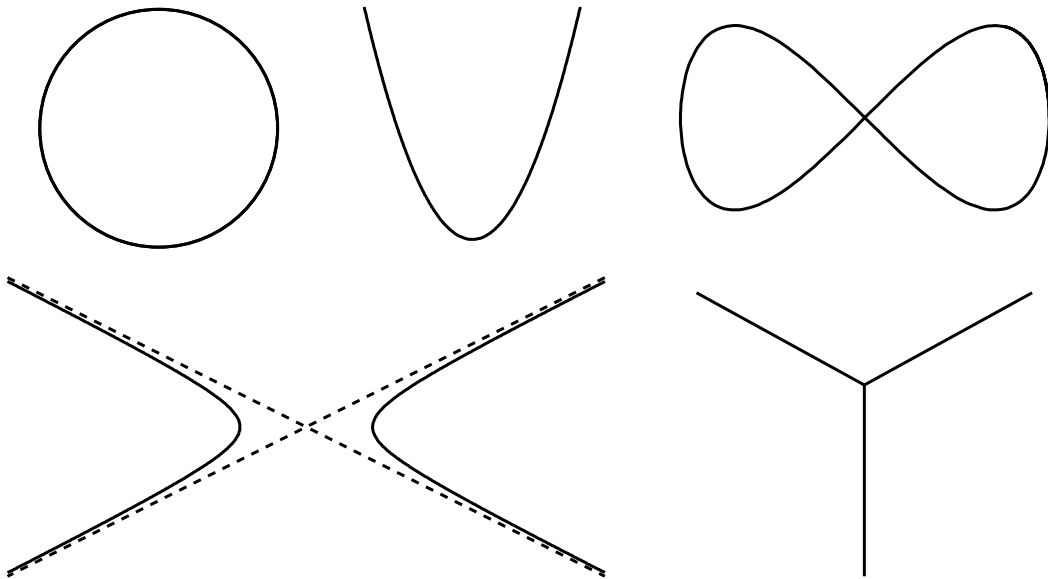


図 1: 円・放物線・双曲線と8の字・Yの字

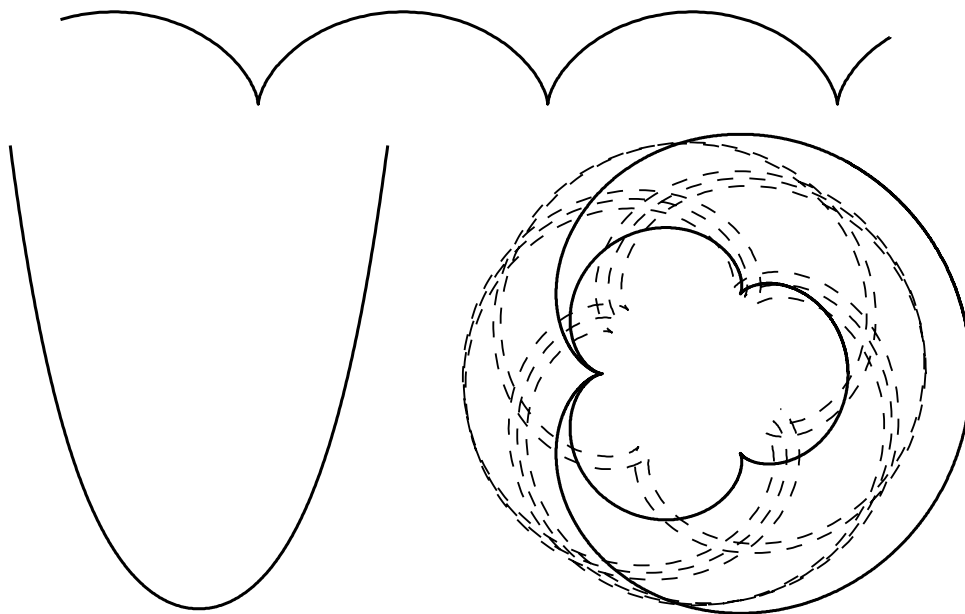


図 2: 懸垂線・サイクロイド・カージオイド

一方、明らかに曲線ではない図形もあります。例えば、平面上に点がいくつか並んでいるような図形は常識的には曲線ではありません。また、平面それ自身も曲線とは言い難いところです。ボールは中身が詰まっている球体と考えても、中身を無視して表面だけ考えても、やはり曲線らしくありません。そもそも球「体」や表「面」という言葉にもこのことが現れています。

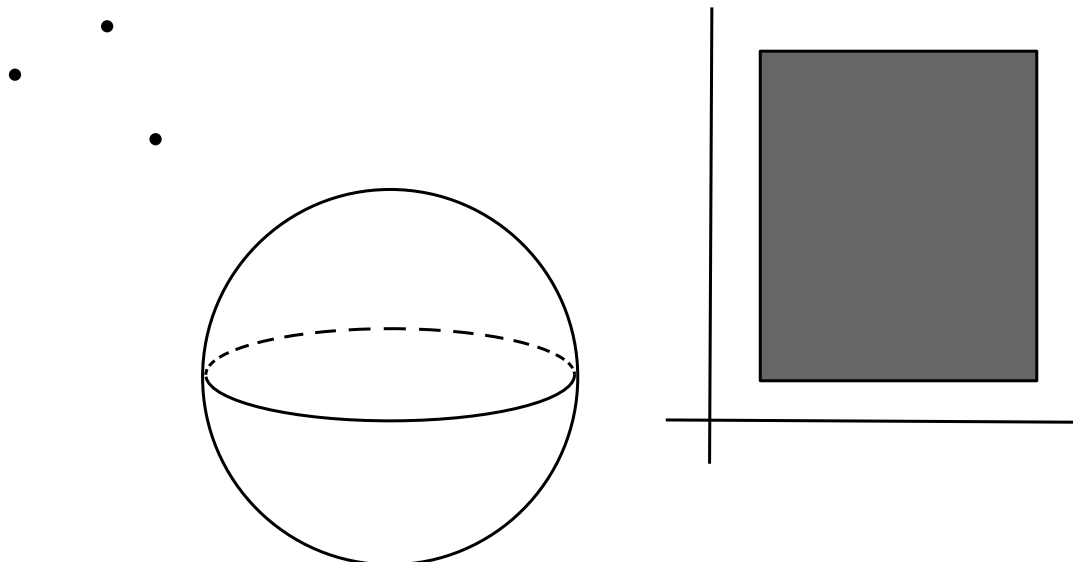


図 3: 曲線には見えない図形

このように数学的にというよりも直感的にですが、普段から図形の何らかの特徴を捉えて曲線とそうでない図形を区別しています。そこで「曲線」らしきものが持つ性質について考えてみます。まず一番目立つのは、部分的に見れば曲線には直線を曲げるか折るかすれば過不足なく貼り付けられるということです（ここは曲線に枝分かれを許すところは少しややこしくなりますが今日は考えないことにしたのでした）。楕円や放物線・双曲線は確かにそうですし、例えば多角形のようなごつごつした図形でも適当に折り曲げてやれば直線を過不足なく貼り付けることができます。一方、直線は平面や球面に貼り付けるには足りなさそうですし、点に直線を貼り付けるのは今度は余りが出てきてしまいそうです。もう一つ、あまりに当然なので見落としがちなのですが、曲線はつながった図形です。但し、つながっているかどうかだけでは曲線を見分けることはできません。曲線はもちろんつながっていますが、例えば平面などもつながっている図形です。一方、平面上にいくつかの点が並んでいてもこれはつながっていません。つながっているかどうか考え方による図形としては、例えば円を二つ離して並べたものが挙げられます。この場合には、各々の円を独立に考える（二つは同時に考えない）ことにして、つながった曲線と考えることにします。

まとめれば曲線は

つながっている図形であって、部分的には直線を曲げるか折るかすれば過不足なく貼り付けることができるもの

である、ということになります。本当にこれで直感的に思い浮かべるような曲線と一致するかどうかは調べてみないとわからないことですが、とりあえずこれでよいことにします。

曲線の定義を数学的に正確にしたいので少し記号を用意します。

記号 1.1. • $\mathbb{R} = \{ \text{実数} \}$ とする。

- $I = [0, 1] = \{ t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t \leq 1 \}$ とする。
- xy -平面を \mathbb{R}^2 で表す。 \mathbb{R}^2 の点は (x, y) のように実数を二つ並べて表す。
- $S^1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \}$ と置き、単位円周と呼ぶ。

定義 1.2. C を \mathbb{R}^2 内の図形とする。

- 1) C が曲線であるとは、ある連続かつ単射であるような写像（函数） $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ を用いて

$$C = f(\mathbb{R}) = \{ f(t) \mid t \in \mathbb{R} \}$$

と書けることを言う.

- 2) C が曲線片であるとは, ある連続かつ単射であるような写像 (函数) $g: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ を用いて

$$C = g(I) = \{g(t) \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

と書けることを言う.

- 3) C が閉曲線であるとは, ある連続かつ単射であるような写像 (函数) $h: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を用いて

$$C = h(S^1) = \{h(p) \mid p = (x, y), x^2 + y^2 = 1\}$$

と書けることを言う.

ここで f が連続というのは実数 t が実数 s に近づいていくと $f(t)$ も $f(s)$ に近づくといいことです. 曲線の場合に式で書けば

$$\forall s \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, |t - s| < \delta \implies |f(t) - f(s)| < \epsilon$$

となります. 曲線片の場合には最初の部分が $s \in I$ に, 閉曲線の場合には $s \in S^1$ に変わります. また, f が単射というのは $f(t) = f(s)$ ならば $t = s$ であるということで, 曲線が8の字のようにはなっていないことや, 直線が過不足なく貼られていることに対応します. 実は上の定義は「ジョルダン (Jordan) 曲線」と呼ばれるものの定義で, 一般には f が単射であることを仮定しません. ただ, ここではジョルダン曲線しか考えませんので, ジョルダン曲線のことを曲線と呼び, f が単射であることを仮定しない時には便宜的に**一般の曲線**と呼ぶことにします. 例えば8の字やYの字は一般の曲線です. 実はジョルダン曲線と一般の曲線にはいくつか大きな差異があります. 8の字やYの字もこのような差異が表われている例ですが, 最後にもっと状況が異なる例を挙げます.

ジョルダン曲線 (f が単射の場合) に戻って, いくつか例を挙げてみます.

- 例 1.3.** 1) $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}$ とします. $(a, b) \neq (0, 0)$ であれば L は直線ですが, 上の意味では曲線です. 実際, $f(t) = \left(\frac{bt - ac}{a^2 + b^2}, \frac{-at - bc}{a^2 + b^2} \right)$ とすれば

$$a \frac{bt - ac}{a^2 + b^2} + b \frac{-at - bc}{a^2 + b^2} + c = \frac{abt - a^2c - bat - b^2c + ca^2 + cb^2}{a^2 + b^2} = 0$$

ですから, $f(t)$ は常に L 上にあります. 逆に L 上の点は $f(t)$ の形をしていることも容易にわかります. また, $f(t) = f(s)$ であれば

$$\begin{aligned}\frac{bt - ac}{a^2 + b^2} &= \frac{bs - ac}{a^2 + b^2}, \\ \frac{-at - bc}{a^2 + b^2} &= \frac{-as - bc}{a^2 + b^2}\end{aligned}$$

が成り立ちますから, $b(t - s) = 0$ かつ $a(t - s) = 0$ が成り立ちます. a か b の少なくとも一方は 0 ではありませんので, $t = s$ が成り立ちます. 従って f は単射です. f が連続なことも簡単に証明できますが, ここでは省略します.

- 2) $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1, x > 0\}$ とすると, H は曲線です. 実際, $f(t) = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}, \frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)$ とすれば,

$$\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2t} + e^{-2t} + 2}{4} - \frac{e^{2t} + e^{-2t} - 2}{4} = 1$$

が成り立ちます. また, $f(t) = f(s)$ であれば

$$\begin{aligned}\frac{e^t + e^{-t}}{2} &= \frac{e^s + e^{-s}}{2}, \\ \frac{e^t - e^{-t}}{2} &= \frac{e^s - e^{-s}}{2}\end{aligned}$$

が成り立ちますから

$$\begin{aligned}e^t + e^{-t} &= e^s + e^{-s}, \\ e^t - e^{-t} &= e^s - e^{-s},\end{aligned}$$

より $e^t = e^s$, $e^{-t} = e^{-s}$ が得られます. 二番目の式は最初の式と同値なので最初の式だけを見れば充分です. $e^t = e^s$ であれば $t = s$ なので, f は単射です. $H = f(\mathbb{R})$ であることも容易にわかります.

実は H よりも $H_{\pm} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$ を考えた方が自然ですが, $H_+ = H$, $H_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1, x < 0\}$ とすると, $H = H_+ \cup H_-$ と二つの部分に分かれてしまうので, 先ほど述べたようにここでは H を考えました. H_- も曲線であることを H と同様に確かめることができます.

- 3) S^1 は閉曲線です. $f: S^1 \rightarrow S^1$ を $f(x, y) = (x, y)$ で定めるとこれは単射かつ連続になります. f は何もしない写像なので $S^1 = f(S^1)$ です.

このように写像（函数）を用いると曲線を数学的に捉えることができそうです。厳密には曲線・曲線片や閉曲線は区別すべきですが、ここからはおおらかにすべて曲線と呼びます。この後現れる曲線は原則的には曲線片であると考えてください。

2 曲線を比べる

ここまでは曲線を外の図形と区別することを考えましたが、今度は曲線を外の曲線と区別することを考えます。二つの曲線 C_1 , C_2 が区別されるということは、何かしら C_1 と C_2 に差異があるということです。例えば

- C_1 と C_2 の長さが異なる。
- C_1 と C_2 が囲む図形の形や面積などが異なる。
- C_1 と C_2 の曲がり方や、折れ曲がり方が異なる。

ということでしたら C_1 と C_2 は異なる曲線と言えるでしょう。今日はこれらのうち曲線の長さに着目してみます。直線の長さは三平方の定理あるいはピタゴラス (Pythagoras, ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ) の定理を用いて求めることができます。

定理 2.1. L を $p = (a, b)$, $q = (c, d)$ を通る直線とする。 L の p , q で切り取られる部分（これを線分と呼ぶ）の長さ $|p - q|$ は

$$|p - q| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$$

で与えられる。

直線は曲線ですから、曲線の長さは線分の長さが上の式で与えられるように定めないという意味がありません。そこで、曲線の場合にも三平方の定理をなんとか真似することにします。曲線は少なくとも部分的には直線を貼り付けることができました。そこで、曲線の多少の曲がりは無視してしまい、直線を貼り付けた所はまっすぐに直してしまいます。つまり曲線を折れ線に直してしまうのです。

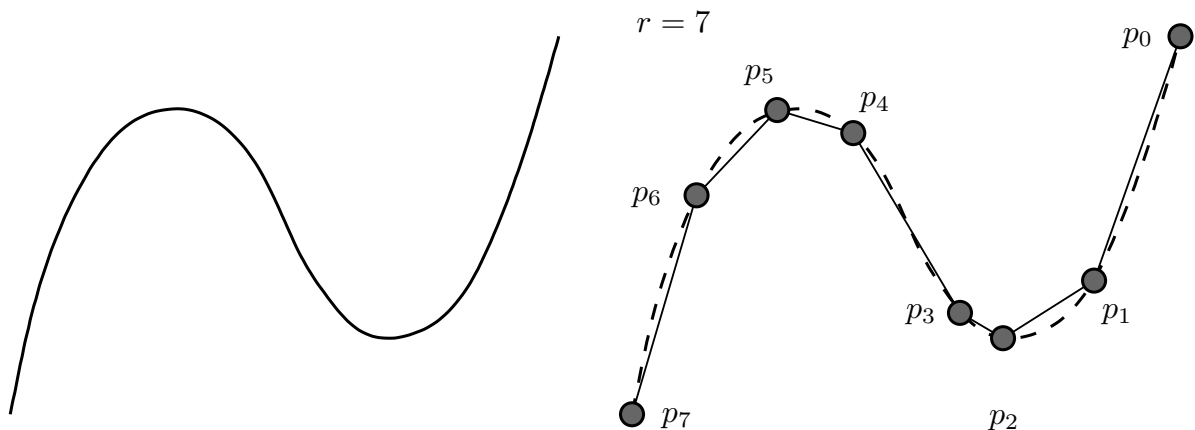


図 4: 曲線を折れ線に直す

こうして得られる折れ線の長さは

$$|p_r - p_{r-1}| + |p_{r-1} - p_{r-2}| + \cdots + |p_1 - p_0| = \sum_{i=1}^r |p_i - p_{i-1}|$$

です. この長さはこのままでは点の取り方に依存してしまい, 曲線から定まる量ではありませんから曲線の長さと呼ぶには相応しくありません. そもそも新たに描いた折れ線と元々の曲線は幾分異なります. 直線のようなきれいな図形はともかくとして, 一般的には折れ線を曲線に近づけていくためには点の数を増やす必要があります. そして, 点の数を増やすと折れ線の長さは長くなる傾向にあります.

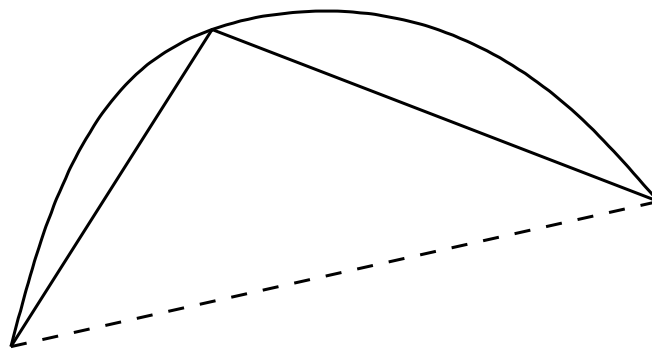


図 5: 点を増やすと折れ線の長さは長くなる傾向にある

C を $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ により与えられる曲線とします. p を C 上の点とすると, $0 \leq t \leq 1$ を充たす実数 t を用いて $p = f(t)$ と表すことができます. C 上に

点 p_0, p_1, \dots, p_r を取るとします. ただし, p_0, p_r は C の端点 $f(0), f(1)$ であるとします. すると, $p_0 = f(t_0), p_1 = f(t_1), \dots, p_r = f(t_r)$ と t_0, t_1, \dots, t_r を用いて表すことができます. さらに, p_0, p_1, \dots, p_r がこの順序で C 上に並んでいることと, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1$ であることは同じことです. このとき p_0, p_1, \dots, p_r で定まる折れ線の長さは

$$\sum_{i=1}^r |p_i - p_{i-1}| = \sum_{i=1}^r |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

です.

これらの考察を踏まえて次のように定めてみます.

定義 2.2. $C = f(I)$ を曲線とする.

$$\ell(C) = \sup_{\substack{r \geq 0 \\ 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1}} \sum_{i=1}^r |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

と置き, C の長さと呼ぶ.

ここで \sup というのは大雑把に言えば最大値のことで, 上限と呼ばれます. 定義の代わりに例で言うと, $t \leq 1$ を満たすような実数 t の最大値と上限は共に 1 です. 一方, $t < 1$ を満たすような実数 t の最大値は存在しませんが, 上限は 1 です. 慣れないうちはさしあたり最大値と考えてしまっても構いません.

例 2.3. 1) $C = \{(x, 0) \mid 0 \leq x \leq 1\}$ とします. $f: I \rightarrow C$ を $f(t) = (t, 0)$ で定めれば C は f で与えられる曲線です. $r > 0$ とし, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1$ を任意に選べば

$$|f(t_i) - f(t_{i-1})| = \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (0 - 0)^2} = t_i - t_{i-1}$$

が成り立ちますので

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r |f(t_i) - f(t_{i-1})| &= (t_r - t_{r-1}) + (t_{r-1} - t_{r-2}) + \dots + (t_1 - t_0) \\ &= t_r - t_0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

が従います. これは r や t_i 達の選び方には無関係ですから, 最大値を取ろうがどうしても値は常に 1 です. 従って $\ell(C) = 1$ です. 一般の線分 C についても $\ell(C)$ は三平方の定理から求まる長さとも一致します.

- 2) $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ とします. C は半径が 1 の円周の四分の一ですから定義により C の長さは $\frac{\pi}{2}$ ですが, ここでは一時的に C の長さを L としておきます. 今から示したいのは上の式で定義される $\ell(C)$ も L に等しいことです. 角度には弧度法を用いることにします.

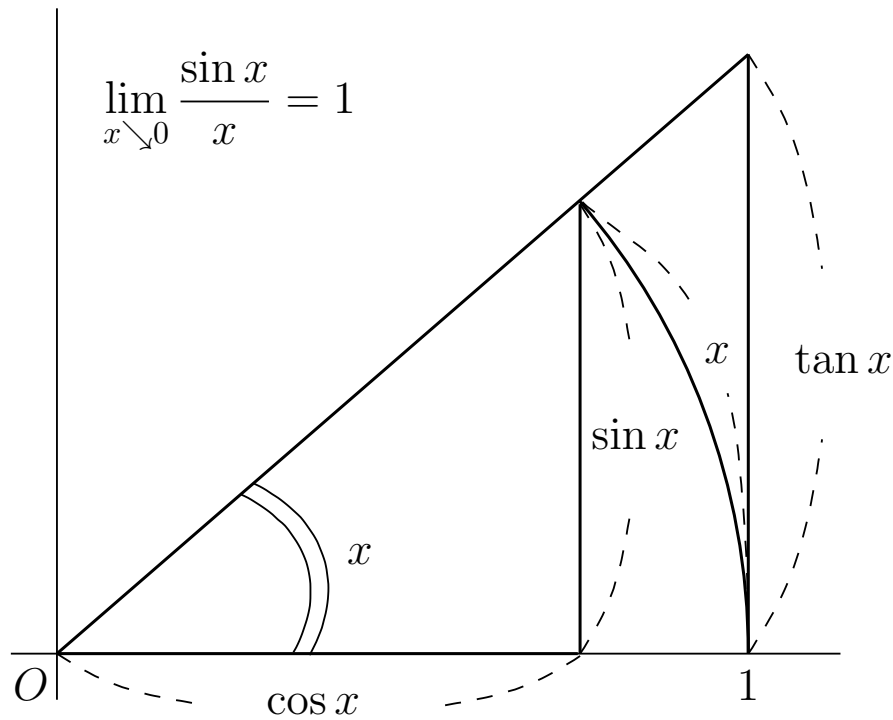


図 6: 弧度法

つまり, 中心角が x で半径が 1 の弧の長さは x であるとします. このとき $g: I \rightarrow C$ を $g(t) = (\cos Lt, \sin Lt)$ で定めれば C は g で与えられる曲線です.

$r > 0$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1$ を任意に選べば

$$\begin{aligned}
 |g(t_i) - g(t_{i-1})|^2 &= (\cos Lt_i - \cos Lt_{i-1})^2 + (\sin Lt_i - \sin Lt_{i-1})^2 \\
 &= \cos^2 Lt_i + \cos^2 Lt_{i-1} - 2(\cos Lt_i)(\cos Lt_{i-1}) \\
 &\quad + \sin^2 Lt_i + \sin^2 Lt_{i-1} - 2(\sin Lt_i)(\sin Lt_{i-1}) \\
 &= 2 - 2 \cos L(t_i - t_{i-1}) \\
 &= 2 - 2 \left(1 - 2 \sin^2 \frac{L(t_i - t_{i-1})}{2} \right) \\
 &= 4 \sin^2 \frac{L(t_i - t_{i-1})}{2}
 \end{aligned}$$

が成り立ちますので

$$|g(t_i) - g(t_{i-1})| = 2 \left| \sin \frac{L(t_i - t_{i-1})}{2} \right| = 2 \sin \frac{L(t_i - t_{i-1})}{2}$$

です. 絶対値は図形的な考察から外せます. ここで, $x > 0$ の時 $0 \leq \frac{\sin x}{x} < 1$ であって, x が 0 に近づけば近づくほど $\frac{\sin x}{x}$ は 1 にいくらでも近づくことを用いると, $2 \sin \frac{L(t_i - t_{i-1})}{2}$ と $L(t_i - t_{i-1})$ との誤差

$$L(t_i - t_{i-1}) - 2 \sin \frac{L(t_i - t_{i-1})}{2}$$

は 0 にはならないものの $t_i - t_{i-1} > 0$ が小さくなればなるほど無視できるほど小さくなっていくことがわかります. このことから円弧を近似する折れ線の長さ $\sum_{i=1}^r |g(t_i) - g(t_{i-1})|$ と $\sum_{i=1}^r L(t_i - t_{i-1}) = L$ との誤差は r を大きくすることによっていくらでも小さくすることができることがわかります. 一方, $\sum_{i=1}^r |g(t_i) - g(t_{i-1})| < L$ が常に成り立ちますので, $\sum_{i=1}^r |g(t_i) - g(t_{i-1})|$ の「最大値」は L とするのが妥当です. よって $\ell(C) = L$ が成り立ちます. 上限の正確な定義をしていないので心配になるかもしれませんが, 上の議論の筋道はほぼこのままで数学的に正確なものです.

どうやら曲線の長さと言って良いものが得られたようです.

3 さまざまな曲線

曲線やその長さを数学的に捉えることができるようになりましたので、いろいろな曲線を調べてみます。

例 3.1 (悪魔の階段). 下のグラフは悪魔の階段と呼ばれる曲線です。

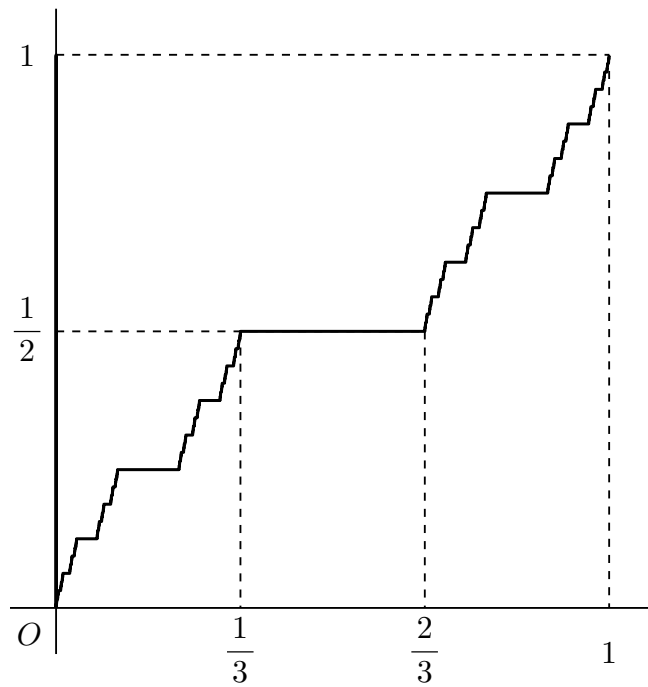


図 7: 悪魔の階段 (Devil's ladder)

これは次のように描くことができます。まず $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ と $(\frac{2}{3}, \frac{1}{2})$ を結ぶ水平な線を描きます。

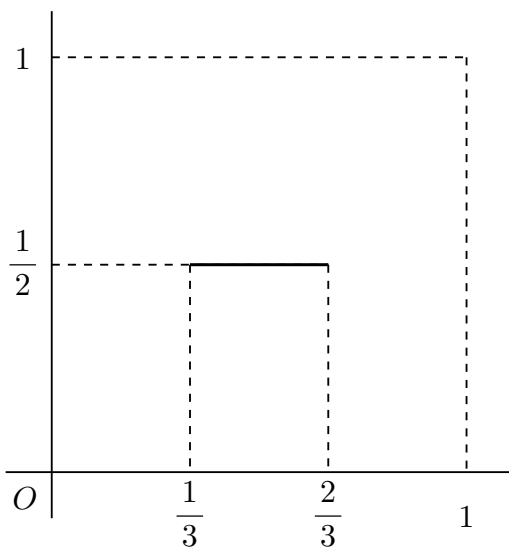


図 8: 最初の段階

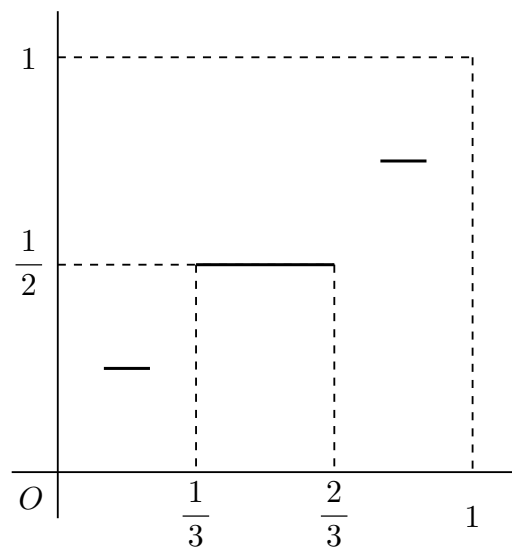


図 9: 第二段階

次に $(0,0)$ を固定して水平方向に $\frac{1}{3}$ 倍, 垂直方向に $\frac{1}{2}$ 倍した図と, $(1,1)$ を固定して水平方向に $\frac{1}{3}$ 倍, 垂直方向に $\frac{1}{2}$ 倍した図を重ね合わせます. 同様の作業を繰り返すと下のような図が得られていきます.

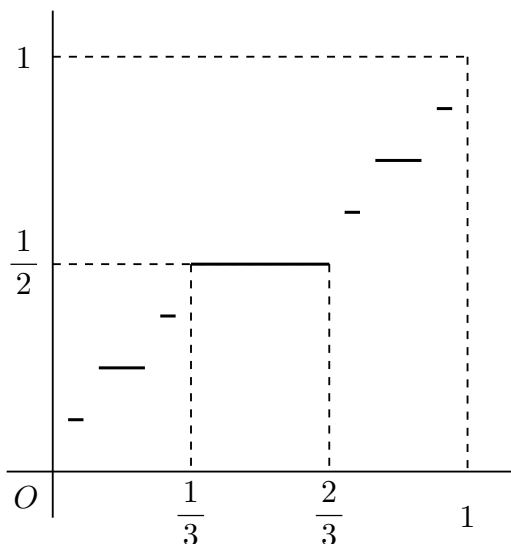


図 10: 第三段階

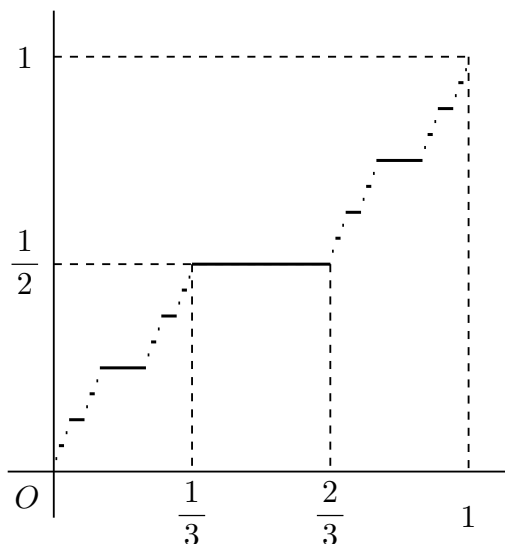
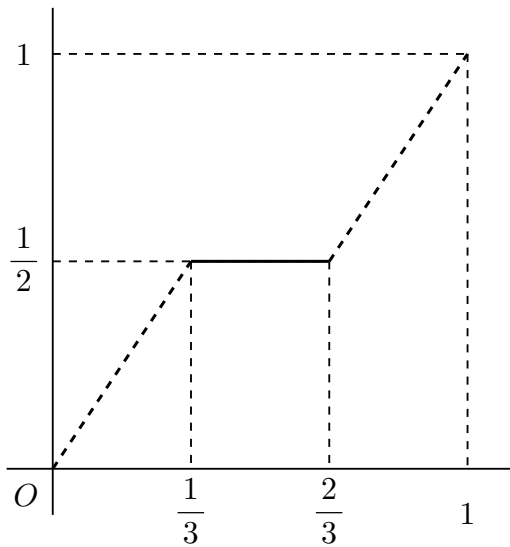
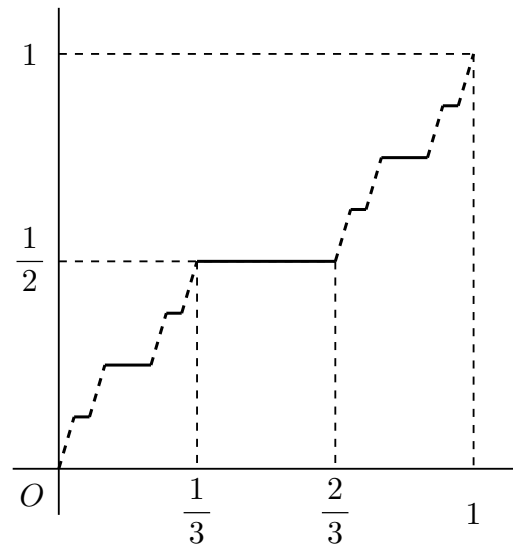


図 11: 第五段階

実際には水平な線分がばらばらに並んでいるだけなのですが, だんだんつながった曲線のように見えてきます. この操作自体は終わることはできないのですが, 「極限」と呼ばれる最終的な状態を数学的に考えることができ, そこまでいけば曲線が得られることがわかります. 実は最初の図は最終的な状態ではなく, 第十段階に少し手を加えたものです.

この曲線 (D とします) の長さはいくつでしょうか. D の長さは D を折れ線で近似してその長さを求め, 近似を良くしていくことで求まるのでした. できあがりの曲線は階段状に並んだ水平線をあたかも斜めにつないだような形をしていますから, 第 k 段階において隙間になっている部分に斜めの線を加えて得られる折れ線を D_k とします.

図 12: D_1 図 13: D_3

折れ線 D_k の水平部分の長さは次のように求まります. 第一段階では $\frac{1}{3}$ の長さの線分が一つです. 隙間が左右に一つずつ存在し, 次の段階ではそこに線分が新たに現れます. 一般に第 k 段階において初めて現れる水平部分は 2^{k-1} 個の線分からなり, 一つの線分の長さは $\frac{1}{3^k}$ です. 従って D_k の水平部分の長さは

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \cdots + \frac{2^{k-1}}{3^k} = \frac{1}{3} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^k}{1 - \frac{2}{3}}$$

です. 一方, 書き加えた斜めの線は 2^k 本存在し, 一本あたりの長さは $\sqrt{\left(\frac{1}{3^k}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^k}\right)^2}$ ですから, D_k の斜めの部分の長さは

$$2^k \sqrt{\left(\frac{1}{3^k}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^k}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^{2k} + 1}$$

です. 従って D_k の長さは

$$\frac{1}{3} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^k}{1 - \frac{2}{3}} + \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^{2k} + 1}$$

ということになります. k を大きくしていくと D_k は D に近づきますが, 一方 D_k の

長さは

$$\frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} + \sqrt{1} = 2$$

に近づきます. このことから $l(D) \geq 2$ であることがわかりますが, もう少し慎重に議論をすると $l(D) = 2$ であることがわかります. これは D の水平部分の長さ 1 と垂直方向のずれ 1 を丁度足しあわせたものになっています. これは D には斜めになっているところがないことを示唆しています. 例えば $(0,0)$ と $(1,1)$ をまっすぐ結ぶといかにも斜めになっている線が現れますが, この長さは $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ です. 一般に $\sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b$ が $a, b \geq 0$ の時に成り立つことから, もし斜めになっている部分があれば $l(D) < 2$ であることがわかります. しかし実際にはそうではないということです. 悪魔の階段は, 図を見ると斜めになっているところがありそうなものなのに精密に調べるとそんなことはないという, 非常に不思議な性質を持つ曲線です.

このように, 直線のような単純な図形から始めても無限の操作を許すとおかしなことが起き始めます. 先ほどは「悪魔」が現れましたが, 考えようによってはもっと厄介な曲線もあります.

例 3.2 (高木函数のグラフ). 次のグラフは高木函数と呼ばれる函数のグラフです.

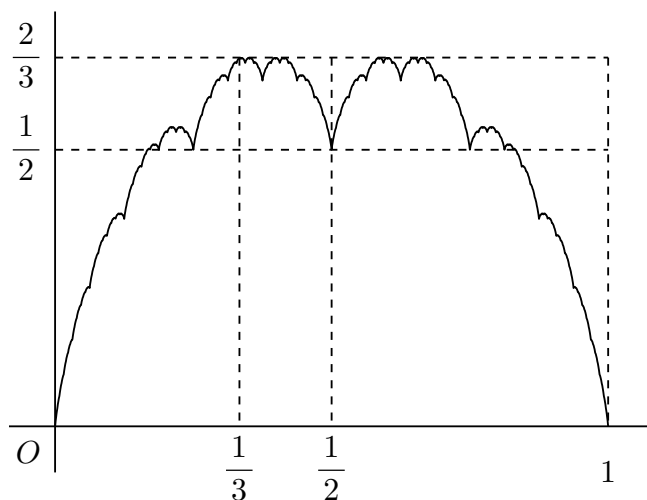


図 14: 高木函数のグラフ

これは次のように得られます. まず, 斜辺の長さが 1 の直角二等辺三角形を考えます. 次に, 斜辺の長さが $\frac{1}{2}$ の直角二等辺三角形を二つ並べます. これを先の直角二等辺三角形に積み上げます.

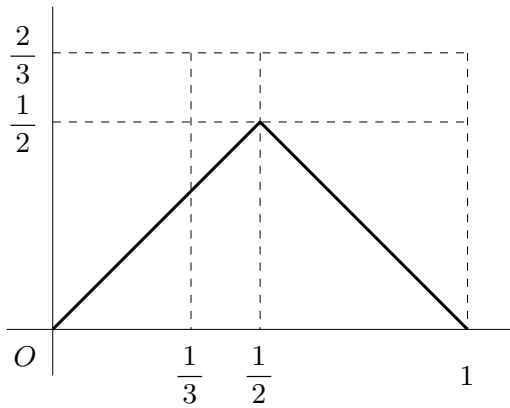


図 15: 最初の段階

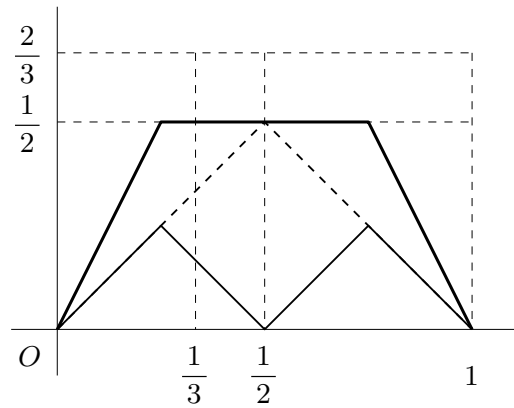


図 16: 第二段階

同様の作業を繰り返すと下の図のようにグラフは変化していきます.

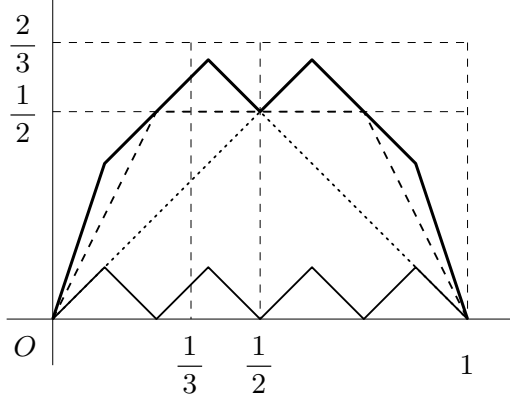


図 17: 第三段階

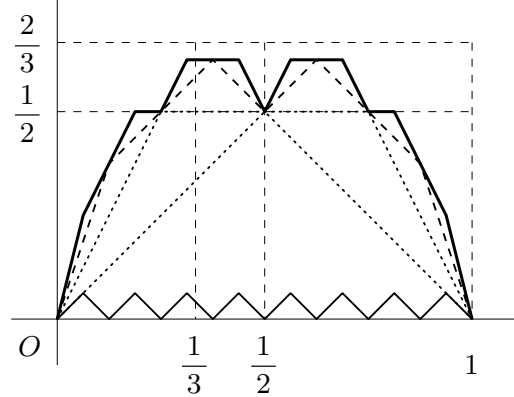


図 18: 第四段階

これを繰り返すと極限として高木函数のグラフが得られます. これを T とし, T のうち $a \leq x \leq b$ の部分を $T_{a,b}$ とします. すると $a < b$ であれば $l(T_{a,b})$ は無限大になってしまいます. 言い換えれば $T_{a,b}$ を折れ線で良く近似しようとするといくらでも長さが長くなってしまふということです.

このような性質を持つ曲線が高木函数のグラフしかないのなら長さが無限大になってしまうこと自体によって高木函数のグラフを外の曲線から区別できますからそれはそれでよいのですが, 実際にはこのような曲線は沢山あります.

例 3.3 (コッホ (Koch) 曲線). 下の曲線はコッホ曲線と呼ばれます.

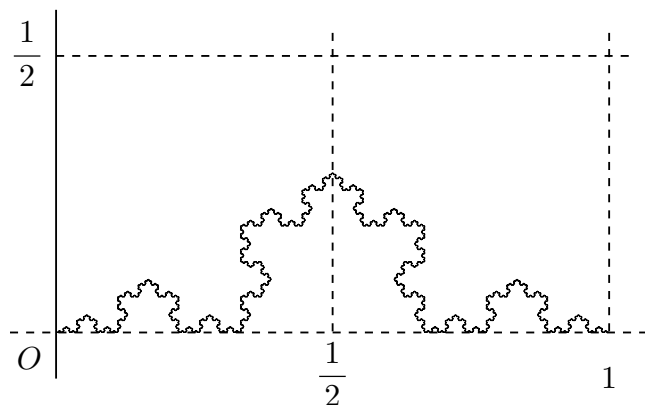


図 19: コッホ曲線

これは次のように得ることができます。まず $(0,0)$ と $(1,0)$ を結ぶ線分を考えます。

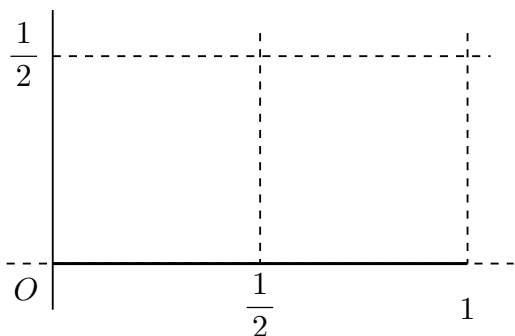


図 20: 第一段階

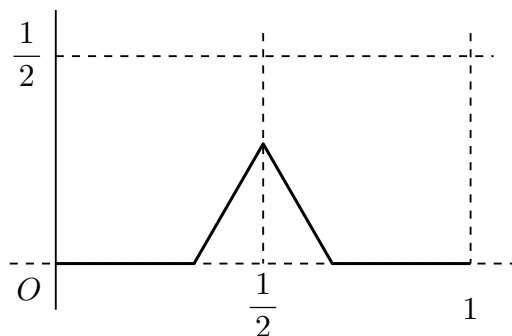


図 21: 第二段階

これの真ん中の三分の一を正三角形で置き換え、底辺は除きます。すると右隣の図形が得られます。これが基本形で、この後は線分の真ん中に山を逐次作っていきます。

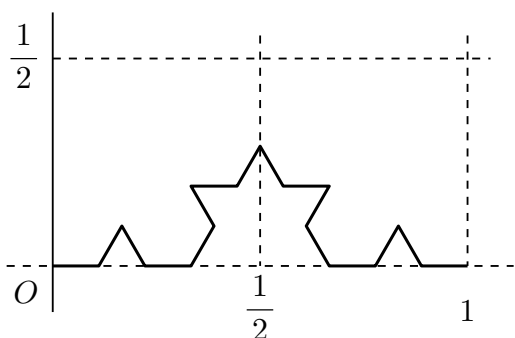


図 22: 第三段階

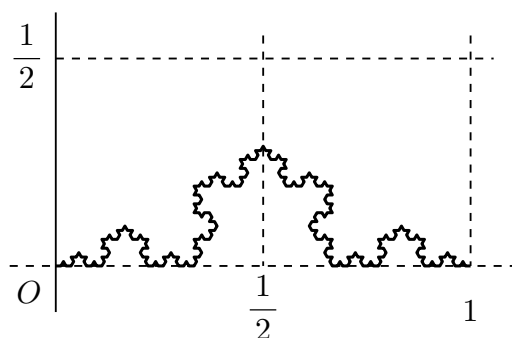


図 23: 第五段階

一段階ごとに長さが $\frac{4}{3} > 1$ 倍されていきますからコッホ曲線 (K とします) の

長さはやはり無限大です. 今は全体の長さについて述べましたが, 曲線のどの部分でも同じことが起きていますから, どんなに小さい部分を切り取ってもやはりその部分の長さは無限大です.

悪魔の方がまだかわいいような感じですが, 曲線を調べる (比べる) のに長さが有効でない場合には手も足も出ないというわけでもありません.

長さがだめならいっそ「面積」を考えてみます. とは言え曲線ですから通常の意味で面積を測っても恐らく 0 でしょう. 実際, 高木函数のグラフやコッホ曲線の面積は 0 になることがわかります. それでもどうにか「面積」を定めたいので, まずわかっている場合として直線や長方形の場合を振り返ってみます.

曲線の長さは折れ線で曲線を近似して定義しましたが, これは曲線に短い直線を沢山貼り付けてその長さを測り, その精度を上げていったと考えることができます. きちんと定義しませんでした, 面積は長さと同様に小さい四角形を貼り付けて定義することができます.

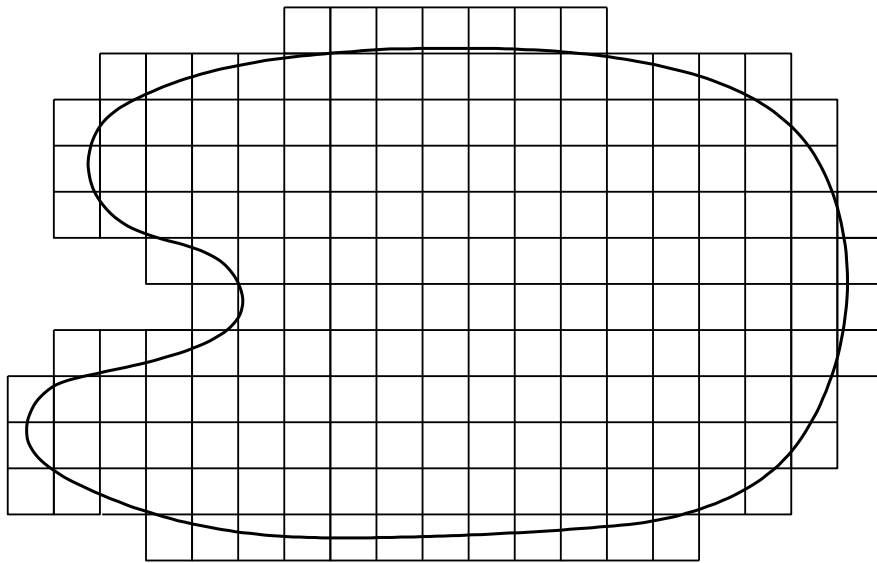


図 24: 面積の定義の仕方

長さと面積の測り方の差は貼り付けている図形にあります. これを同じにできれば両者を結びつけることができるでしょう. 曲線の長さを測る時に本当に直線を貼り付けないといけないうとそんなこともありません. 例えば正方形を貼り付けることにしても, その対角線の長さをういれば折れ線の長さが求まることが見て取れます.

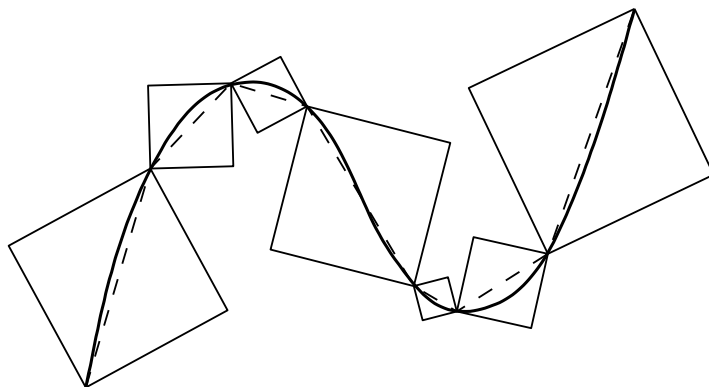


図 25: 正方形でも構わない

上の図では正方形は重なっていませんが、曲線の具合によってはどうしても重なってしまうこともあります。このようなことは気にせず、対角線が重なっていなければよいことにします。

一方、面積を測る時には正方形の面積の和、つまり一辺の長さの二乗を足し上げれば近似的な面積が求まります。正方形の対角線の長さは一辺の長さに比例することを考慮に入れてこれらを比べてみます。

求める量	足し上げる量
長さ	一辺の長さ
面積	一辺の長さの二乗

ただし、実際には求まる長さは $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍に変化してしまいます。

少し誤差はありますが、正方形を使って長さも面積も測れるようになったので、これを次のように一般化してみます。まず、曲線 C を一辺の長さが高々 r の正方形で近似します。これを R_1, \dots, R_k とするとき、

$$h_s^r(R_1, \dots, R_k) = \sum_{i=1}^k (R_i \text{ の一辺の長さ})^s$$

と定めます。とりあえず r を固定し、ありとあらゆる正方形による近似を考え

$$H_s^r(C) = \inf_{\text{近似 } R_1, \dots, R_k} h_s^r(R_1, \dots, R_k)$$

と置きます。近似ごとに k は変化して構いませんが、正方形の大きさの上限 r は固定します。また、 \inf は長さを定めた時に用いた \sup の「最小値」版で、下限と呼ばれます。

実は $H_1^r(C)$ は直線の長さで現れた折れ線の長さに当たります。そこで

$$H_s(C) = \sup_{r>0} H_s^r(C)$$

と定め、 C の s -次元ハウスドルフ (Hausdorff) 測度と呼びます。 r が小さくなれば近似は良くなりますので、上の \sup は実際には r を小さくしていった時の極限と考えて構いません。本当は $H_s^r(C)$ の定義は正しくなく、もう少し工夫する必要がありますので注意が必要です。

さて、長さを求める時には $H_1(C)$ 、面積を求める時には $H_2(C)$ を考えるわけですが、これは最初に s を決めてしまっています。今は曲線 T や K に対して相応しい s を定めたいので s を定める手段が必要です。直線や正方形については図形と $H_s(C)$ の値には次のような関係があります。例えば C を直線とするとその面積 $H_2(C)$ は 0 です。また、 $H_0(C)$ は直線に含まれる点の数を数えることに対応し、 $H_0(C)$ は無限大になります。もちろん $H_1(C)$ は有限の値です。一方、 C を正方形の境界及び内部とすると $H_2(C)$ は有限の値です。 C には点や線分が無限に含まれますから $H_0(C)$ や $H_1(C)$ は無限大になります。一般には $H_s(C)$ は C の種類により以下のような値 (あるいは状態) をとることがわかります。

s	0		1		2	
$H_s(\text{直線})$	∞	∞	有限	0	0	0
$H_s(\text{正方形})$	∞	∞	∞	∞	有限	0

いずれの場合にも境目に当たる値 s_0 (直線であれば $s_0 = 1$, 正方形であれば $s_0 = 2$) が存在して、

$s < s_0$ であれば H_s の値は無限大

$s_0 < s$ であれば H_s の値は 0

が成り立ちます。そこで次のように定めます。

定義 3.4 (ハウスドルフ (Hausdorff) 次元).

$$\begin{aligned} \dim_H C &= \inf \{s > 0 \mid H_s(C) = 0\} \\ &= \sup \{s > 0 \mid H_s(C) = \infty\} \end{aligned}$$

と置き、 C のハウスドルフ次元と呼ぶ。

これに従えば、直線のハウスドルフ次元は1、正方形のハウスドルフ次元は2です。定義3.4のように回りくどいことをせず、 $\dim_H C$ を $H_s(C)$ が有限の値を取るような最小値とすればよいような気がします。すぐ後で述べるように、高木函数のグラフ T (この場合 $s_0 = 1$)のように H_{s_0} が無限大になってしまう図形もあるので上のように定めます。

さて、ある図形のハウスドルフ次元が s であるということはおおよそどのようなことを意味しているのでしょうか。 $\dim_H C = s$ とすると、 $H_s(C)$ は C を近似する正方形の辺の長さの s 乗を足しあわせたものでよく近似されます。 C の見かけの大きさを r 倍した図形を rC とします。近似する正方形も含めて図を全体として r 倍すると、近似している正方形の辺の長さの s 乗は r^s 倍されますから、 $H_s(rC) = r^s H_s(C)$ であると考えられます。つまり、

$$r^s = \frac{r \text{ 倍して得られる図形の } s\text{-次元測度}}{\text{元の図形の } s\text{-次元測度}}$$

ですから、右辺を「体積比」と呼ぶことにすれば

$$s = \log_r \text{ 体積比} = \frac{\log \text{ 体積比}}{\log r}$$

が成り立ちます。いつもこれが正しいわけではないのですが、多くの図形に対してこれは正しく、今の場合にも当てはめることができます

$$\dim_H(K) = \frac{\log 4}{\log 3},$$

$$\dim_H(T) = 1$$

が成り立ちます。また $\dim_H(D) = 1$ が成り立ちます。まとめると

曲線	長さ	次元
D	2	1
T	∞	1
K	∞	$\frac{\log 4}{\log 3}$

となり、これらの曲線は全て区別することができます。

最後にもっと変わった曲線を挙げて終わりにします。

例 3.5 (ヒルベルト曲線). 次の図は曲線ではなく, $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ で囲まれた正方形 (R とします) を塗りつぶしたように見えますが, これはヒルベルト曲線と呼ばれる曲線です.

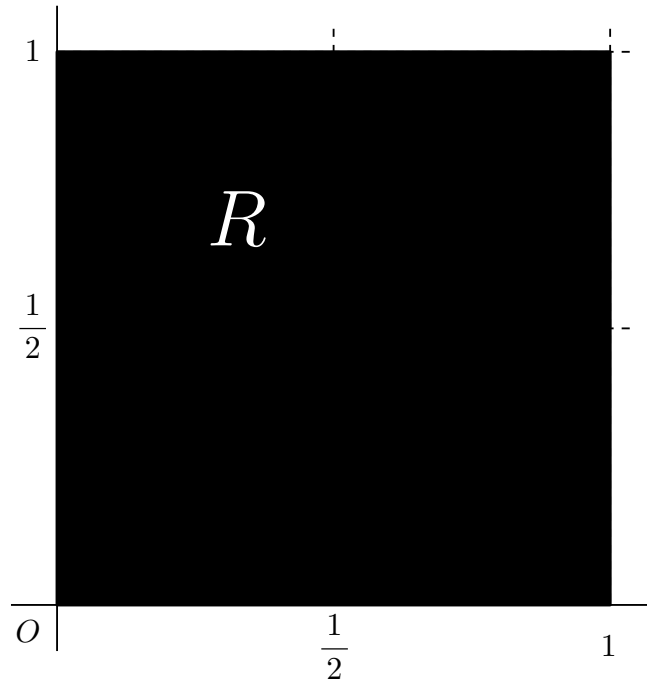


図 26: ヒルベルト曲線

ヒルベルト曲線を連続な写像 $f: I \rightarrow R$ で表すと $f(I) = R$ が成り立ちます. もちろん長さは無限大で, 面積は 1 です. ヒルベルト曲線も先に紹介したいくつかの曲線と同様にある操作を無限に繰り返すことで得られます. 途中の段階は例えば次のようになっています.

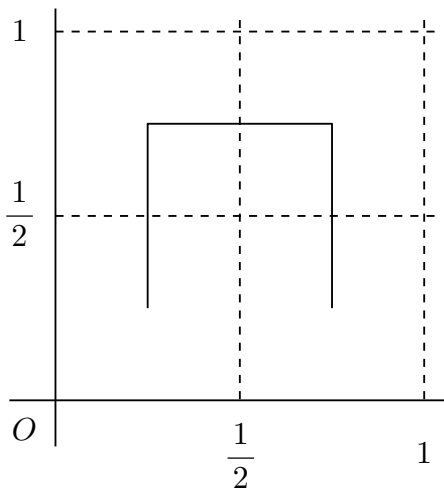


図 27: 最初の段階

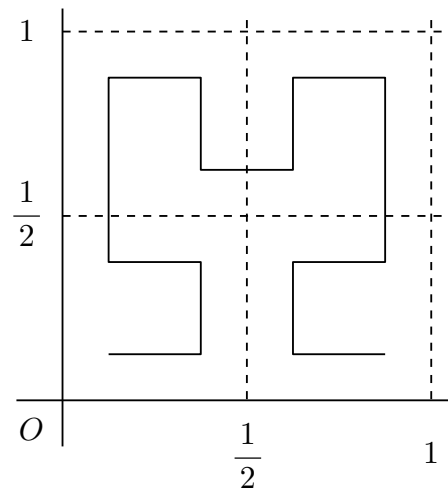


図 28: 第二段階

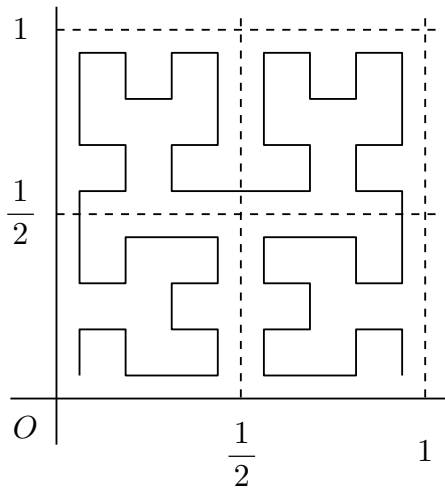


図 29: 第三段階

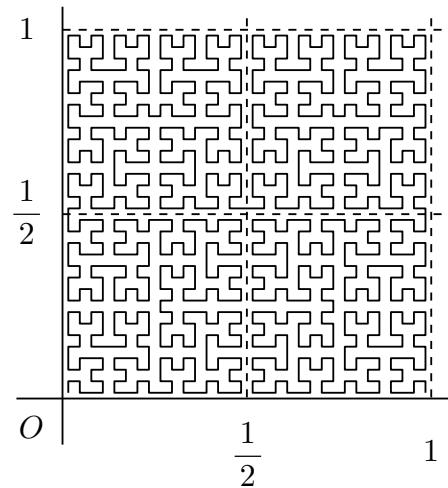


図 30: 第五段階

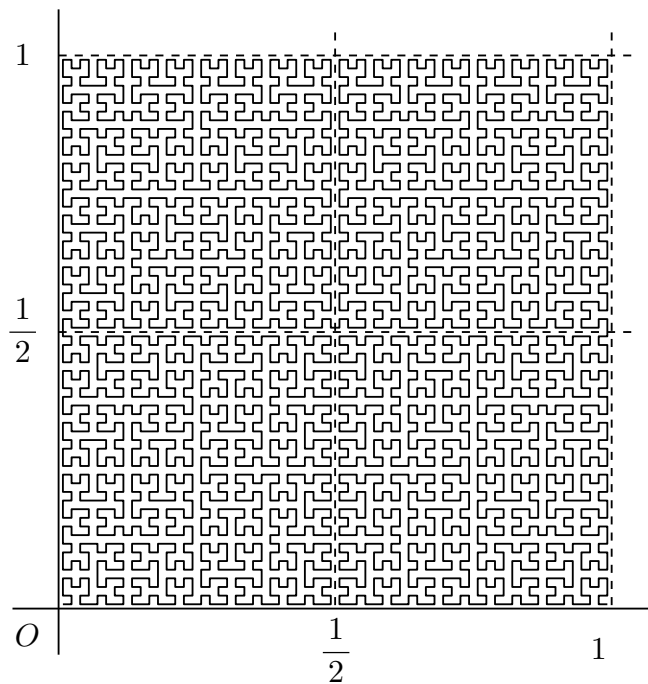


図 31: ヒルベルト曲線（第六段階）

実はヒルベルト曲線はジョルダン曲線ではなく一般の曲線です。「平面は曲線ではない」ことを出発点の一つにしたのですが、一般の曲線を考えるとこのように平面（の一部）も曲線になってしまいます。ジョルダン曲線だけならここまで大変なことにはならないのですが、残った部分の面積が 0 にならないような隙間を正方形に作ることができて、その隙間以外の部分を埋め尽くすようなジョルダン曲線を描くことができます。つまり正の面積を持つようなジョルダン曲線が存在するのです。さらに、この隙間はいくらでも小さく取ることができて、ジョルダン曲線の面積がいくらでも 1 に近い

ようにできることが知られています。一方、次元について言えば 1 以上の任意の実数 s について $\dim_H C = s$ となるようなジョルダン曲線が存在することが知られています。 $\dim_H C > 1$ であれば C の長さは無限大です。一方 $\dim_H C < 2$ であれば C の面積は 0 です。 $\dim_H C > 2$ であるような曲線は平面上ではなく空間内やさらに次元が高い空間の中に存在します。基本的な考え方はここまでの話と同じです。

このように曲線という目に見えて紛れが一切なさそうな対象でも、それを数学的に捉えることは意外に難しいことなのです。

参考文献

- [1] フラクタル曲線についての解析学 —擬等角写像外伝—, 谷口 雅彦著, 培風館, 2004.
- [2] フラクタル集合の幾何学, K.J. ファルコナー著, 畑 政義訳, 近代数学社, 1989.