

2022 年 数学講究 XB
複素ベクトル場の幾何 (5/11 版)
5/10 日 (火) 14:55–15:50
オンライン

足助 太郎

2022 年 5 月 11 日

0 成績評価について

成績評価はレポートによる。幾つか問を出す（この資料にもいくつか書いたが、原則として講義中に述べる）。これらを幾つか解けばよい（練習問題（○がついているもの）は含めない。また、三問を上限とする）。ただし、問の難易度は様々なので（* を付けてあるのは難しいと考えて出題している）、余りに易しいものに偏らないように注意すること。問題の選択も含めて評価する。問題に不備がある場合には、それを指摘して合理的に修正した上で解けば高く評価する。あるいは、講義に関連する話題について自分で問題を設定してレポートを作成しても構わないし、講義では述べなかった証明の詳細などについて詰めるのもよい。

1 ベクトル場を捉える

まずは実ベクトル場を考える。 X が \mathbb{R}^n 上のベクトル場であるとは、 X が \mathbb{R}^n の各点 p に対して p における接ベクトル $X(p) \in T_p\mathbb{R}^n$ を与える写像であることであった。一般に、 M を多様体とし、 TM を接空間とすれば M 上のベクトル場が定まる。さて、 $v \in TM$ とする。すると、 $p \in M$ が一意的に存在して $v \in T_pM$ が成り立つ。そこで、 $\pi(v) = p$ と定め、 $\pi: TM \rightarrow M$ を射影と呼ぶ。

問 1.1°。 X が M 上のベクトル場ならば、 $\pi \circ X = \text{id}_M$ が成り立つことを示せ。

M から TM への写像 X で、 $\pi \circ X = \text{id}$ をみたすものを TM の切断 (section) と呼ぶ。ベクトル場を TM の切断と捉えて調べるのは一つの基本的な方法であるが、ここでは少し別な考え方について述べる。

ベクトル場を図示してみる。矢印をたくさん描くと、これらは何となく曲線たちを描いているように見える。これらの曲線はベクトル場の積分曲線である。

定義 1.2. X を M 上のベクトル場とする。 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ が $t=0$ で $p \in M$ を通る X の積分曲線であるとは、 $\gamma(0) = p$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $D\gamma(t) = X(\gamma(t))$ が成り立つことをいう。

ここでは簡単のために積分曲線の定義域を \mathbb{R} としたが、実際には小さい開区間であることもある。

例 1.3. $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ とする. \mathbb{R}^2 上のベクトル場 X を $X = \lambda x \frac{\partial}{\partial x} + \mu y \frac{\partial}{\partial y}$ により定める. $p = (x_0, y_0)$ とすると, $t = 0$ で p を通る積分曲線は $\gamma(t) = (x_0 e^{\lambda t}, y_0 e^{\mu t})$ で与えられる.

問 1.4. \mathbb{R}^2 上のベクトル場 X を $X = \frac{\partial}{\partial x} + x(1-x) \frac{\partial}{\partial y}$ により定める.

- 1) X の積分曲線をいくつか描け. 明らかに特徴的な曲線がいくつかあるので, 見逃さないこと.
- 2) X の積分曲線の定義域は \mathbb{R} であることもあるし, そうでないこともあることを確かめよ.
- 3) \mathbb{R}^2 の x 軸方向に関して 1 平行移動に関する商空間をとり, $C = (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}$ を考える. X は C 上のベクトル場を定めることを示せ.
- 4*) $S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $S(y) = \left(\frac{2y}{y^2+1}, \frac{y^2-1}{y^2+1} \right)$ により定め, $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ を $F(x, y) = (x, S(y))$ により定める. F は \mathbb{R}^2 から $\mathbb{R} \times (S^1 \setminus \{(0, 1)\})$ への微分同相写像であることを示せ. ただし, S^1 は単位円周である. また, $F_* X$ は $\mathbb{R} \times S^1$, さらに $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times S^1$ 上のベクトル場を定めることを示せ. 最後に, これらのベクトル場を図示せよ.

2 複素ベクトル場

簡単に言ってしまうと, ここまで述べたことを全て複素数にしてしまう, ということである. ただし, 一般には z と \bar{z} が現れて大分話が変わってしまうので, \bar{z} は現れない範囲で考える. つまり, 正則 (複素解析的) な範疇で考える^{†1}.

例 2.1 (例 1.3 も参照のこと). $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ とする. \mathbb{C}^2 上のベクトル場 X を $X = \lambda x \frac{\partial}{\partial x} + \mu y \frac{\partial}{\partial y}$ により定める. $p = (x_0, y_0)$ とすると, $t = 0$ で p を通る積分曲線は $\gamma(t) = (x_0 e^{\lambda t}, y_0 e^{\mu t})$ で与えられるように思える.

積分曲線の定義は定義 1.2 と形式的には, \mathbb{R} を \mathbb{C} として, 全て正則関数を考えることにして, ほかは全く同じとする. すると, 例 2.1 の「思える」は不要で, γ は実際に積分曲線である.

以下では話が退化する場合を除きたいので, $\lambda, \mu \neq 0$ とする. さて, \mathbb{R} を全て \mathbb{C} としたので, γ の変数 t も複素数である. すると, γ の描く図形は 2 次元的 (実際には複素曲線) となり, 起きる現象の種類も増える. 実数の範囲で考えると, X は大雑把には二種類に分類される. 即ち, $\lambda\mu > 0$ の場合と $\lambda\mu < 0$ の場合である. 前者の場合には $\lambda > 0, \mu > 0$ あるいは $\lambda < 0, \mu < 0$ が成り立つ. X の代わりに $-X$ を考えることにすれば $\lambda > 0, \mu > 0$ として良い. このときには X の積分曲線は原点と, 原点に漸近し無限遠に伸びる曲線達からなる ($\lambda = \mu$ ならばこれらは直線である). 後者の場合には, $\lambda > 0, \mu < 0$ として良い. このときには X の積分曲線は原点, 原点に漸近し無限遠に伸びる四つの直線, これらの二つを漸近線とする双曲線状の曲線達からなる ($\lambda = -\mu$ ならばこれらは双曲線である). 複素数の範囲で考える場合でも, この描像は基本的であるが, これでは足りない. ここでは一つの場合についてのみ説明する.

例 2.2. 例 2.1 において $\mu/\lambda \in \mathbb{R}$ とする. t の代わりに λt を考え, $\rho = \mu/\lambda$ とすると, 積分曲線は $\gamma(t) = (x_0 e^t, y_0 e^{\rho t})$ で与えられる. ここで, $t \in \mathbb{C}$ であるので, まず $t \in \mathbb{R}$ の時を考える. すると ρ の正負により, 実数の場合と同様の場合分けが生じる. 一方, $t \in \sqrt{-1}\mathbb{R}$ とし, $t = \sqrt{-1}s$, $s \in \mathbb{R}$ とする. すると, $|e^t| = |e^{\rho t}| = 1$ が成り立つので, $x_0, y_0 \neq 0$ とすると, 積分曲線 (これは今は実二次元である) の内,

^{†1} 有理型とかそういったこともあるが, ここでは 0 でない関数で割ってもまあ良いか, 位に考えておく.

$t = \sqrt{-1}s$ で定まる部分はトーラス ($S^1 \times S^1$) に含まれる. $\rho \in \mathbb{Q}$ ならば $s \in \mathbb{R}$ としたときの $\gamma(\sqrt{-1}s)$ の軌道はいずれも円周と同相である. 一方, $\rho \notin \mathbb{Q}$ ならば軌道はいずれも \mathbb{R} のはめ込みによる像となっていて, トーラス内で稠密である. 実は $\rho = \mu/\lambda \in \mathbb{R}$ は複雑な場合である. 今考えているような範囲では, $\rho \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ とするとこのような細かい場合分けは要らず, 話は簡単である.

問 2.3. 例 2.2 において $t = \sqrt{-1}s$, $s \in \mathbb{R}$ と仮定する. $x_0 \neq 0$, $y_0 = 0$ とすると, 積分曲線の像は円周と同相であることを示せ. 同様に $x_0 = 0$, $y_0 \neq 0$ としても積分曲線の像は円周と同相である. これらの二つの円周と他の積分曲線, あるいは積分曲線が含まれるトーラスの位置関係について考察せよ. なお, 常に $t = \sqrt{-1}s$ とする.

参考文献 (あまりないとも言えるし, 沢山あるとも言える)

複素ベクトル場に関する文献は勢い正則ベクトル束の正則切断に関する話になりがちで, ここで述べたような話に関する入門的なものは意外に少ない. ここでもそのような文献は残念ながら挙げられなかった. それでも関連が一定程度あるような文献を挙げておく. ベクトル場のここで述べたような扱いは多様体の自己同型 (自己同相) と関連が深い. 実際, 積分曲線は見方を変えると一径数局所変換群 (1-parameter family of local transformation groups) である. 複素多様体の自己同型群は Lie 群ではあるが, あまり大きくない (0次元である) ことが少なくない. しかし, 一定の条件を満たすと次元が正となって複素ベクトル場が現れる. このような文脈では例えば小林昭七による変換群の古典的な教科書 [4] が基本的である. また, 少し進んだ内容としては二木不変量 (Futaki invariant) [3] や, Baum–Bott による複素ベクトル場 (より一般に複素解析的な接分布) に関する留数 (residue) に関する文献 [2] が挙げられる. 留数は Poincaré–Hopf の定理を定式化するための一つの道具とも考えられる. これらが有効に機能するためには, ベクトル場が特異点 (零点) を持つ必要がある. 実際, 複素ベクトル場は多くの場合必然的に特異点 (零点) を持つ. そのため, いわゆる特異点論とも関連が深い. これに関しては [5] を挙げておく. 講義中に触れた力学系との関連については, 述べられなかった Poincaré–Bendixson の定理とも関連して [5] を挙げておく. また, Poincaré–Hopf の定理に関しては英語の文献はいくらでもあるので, 和書として [7] を挙げておく. なお, 文献 [6], [7] は実数の範囲での考察がほとんどであるが, 複素数の範囲で類似のことを考えるのには非常に有用である. 最後に, 力学形的な観点からの参考書としては [1] を挙げておく. 上に挙げた参考文献とも一部重複するので, これらとの関連についても少し見て取れる.

- [1] V. I. Arnold, Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations, Springer.
- [2] P. Baum, R. Bott, Singularities of holomorphic foliations, J. Differential Geom.
- [3] A. Futaki, Kahler-Einstein Metrics and Integral Invariants, Springer.
- [4] S. Kobayashi, Transformation Groups in Differential Geometry, Springer.
- [5] J. Milnor, Singular Points of Complex Hypersurfaces, Ann. Math. Studies **61**, Princeton UP.
- [6] 斎藤利弥, 復刊 位相力学 —常微分方程式の定性的理論—, 共立出版.
- [7] 田村一郎, 微分位相幾何学, 岩波出版.