２００３年度微分積分学続論A演習問題（'03.7.14(月) ９０分）

問１． X, Y を $\mathbb{R}^3$ 上の C^∞ 級のベクトル場とする．$X = a_1\dfrac{\partial}{\partial x} + a_2\dfrac{\partial}{\partial y} + a_3\dfrac{\partial}{\partial z}$, $Y = b_1\dfrac{\partial}{\partial x} + b_2\dfrac{\partial}{\partial y} + b_3\dfrac{\partial}{\partial z}$ とするとき、以下の問に答えよ.

1) X と Y の外積 $X \times Y$ を求めよ.
2) $\mathrm{div}\,(X \times Y)$ を求めよ.
3) $\mathrm{rot}\,X$ と Y の内積 $\langle X, Y\rangle$ を求めよ。
4) $\mathrm{div}\,(X \times Y)$ を X, Y, $\mathrm{rot}\,X$, $\mathrm{rot}\,Y$ と内積を用いて表せ。

問２． $X = -2x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y} + \dfrac{\partial}{\partial z}$ とする。以下にあげる曲線 γ が X の積分曲線になっているかどうか判定せよ。判定の根拠も述べること。

1) $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$

2) $\gamma(t) = (e^{-2t}, e^t, t)$ $t \in \mathbb{R}$

3) $\gamma(t) = (e^{-2t}, 0, t + 100)$, $t \in \mathbb{R}$

問３． (x, y) を $\mathbb{R}^2$ の座標とし, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上のベクトル場 X を

$$X(x,y) = P(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

で定める．ここで, $P(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$, $Q(x,y) = -\dfrac{x}{x^2+y^2}$ である．このとき以下の問に答えよ.

1) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上で, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ が成り立つことを示せ.
2) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上の閉曲線 γ を $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t)$ で定める．このとき.

$$\oint_\gamma X \cdot d\boldsymbol{r}$$

を求めよ. 必要であれば $d\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\dfrac{\partial}{\partial x} + \mathrm{d}y\dfrac{\partial}{\partial y}$ としても良い.

3) $r > 0$ とし、$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上の閉曲線 γ_r を $\gamma_r(t) = (r\cos t, r\sin t)$ で定める．このとき.

$$\oint_{\gamma_r} X \cdot d\boldsymbol{r} = \oint_\gamma X \cdot d\boldsymbol{r}$$

であることを示せ.

4) 一般に、ρ を $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 内の閉曲線で, 自分自身とは交わらず, なおかつ原点を左回りに丁度一周するものとする（図を参照）. このとき.

$$\oint_\rho X \cdot d\boldsymbol{r} = \oint_\gamma X \cdot d\boldsymbol{r}$$

であることを示せ.

問４． 次にあげる $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上のベクトル場を極座標表示に書き替えよ。

1) $X(x,y) = x^2 \dfrac{\partial}{\partial x} + y^2 \dfrac{\partial}{\partial y}$

2) $X(x,y) = xy \dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}$

3) $X(x,y) = \log(x^2+y^2) \dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{1}{x^2+y^2} \dfrac{\partial}{\partial y}$

問５． 函数 $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ を $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ で定める。問４の各ベクトル場について、(x,y)-座標（直交座標）での表示を用いて Xf を計算したものと、極座標を用いて Xf を計算したものが一致することを確かめよ。