が成り立つので，φ_{*p} は線型写像であって，また，$\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}_p, \dots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}_p\right), \left(\dfrac{\partial}{\partial y_1}_q, \dots, \dfrac{\partial}{\partial y_n}_q\right)$ に関する表現行列は $D\varphi(p) = \left(\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(p)\right)$ に等しい．まとめると，座標 $(x_1, \dots, x_n)$ を用いて得られる同一視 $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times F$ と座標 $(y_1, \dots, y_n)$ を用いて得られる同一視 $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times F$ は

$$D\varphi \colon (p, v) \mapsto (\varphi(p), D\varphi(p)v)$$

により対応する．これは $T\mathbb{R}^n$ を座標 $(x_1, \dots, x_n)$ により $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ と見なした空間から，$T\mathbb{R}^n$ を座標 $(y_1, \dots, y_n)$ により $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ と見なした空間への微分同相写像である．従って，$T\mathbb{R}^n$ の C^∞ 級の多様体の構造は $\mathbb{R}^n$ の座標の選び方に依らない．また，$T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times F$ とすると，$D\varphi$ は $v \in F$ に関して線型同型写像であるから，F の線型空間としての構造も座標の取り方によらない．

ここまでの構成は $\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ の開集合 U としても同様に行うことができる．すると，次が成り立つ．

補題. $p \in U$ とする．すると，$T_pU = T_p\mathbb{R}^n$ が成り立つ．

さて，$TU = U \times \mathbb{R}^n$，$T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ と上のようにして看做す．補題**??**により，$T_pU = T_p\mathbb{R}^n$ が成り立つから，定義の仕方により，$TU \subset T\mathbb{R}^n$ が成り立つ．そこで，$\iota \colon TU \to T\mathbb{R}^n$ を包含写像とする．一方，$i \colon U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ を $i(p, v) = (p, v)$ により定めることができる．

命題. 図式

$$\begin{array}{ccc} TU & \xrightarrow{\iota} & TM \\ \downarrow & & \downarrow \\ U \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow[i]{} & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \end{array}$$

は可換である．

また，次が成り立つ．

補題. $U, U' \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とし，$U \cap U' \neq \varnothing$ とする．さて，$TU = U \times \mathbb{R}^n$，$TU' = U' \times \mathbb{R}^n$ と上のように看做す．また，$\iota_U \colon TU \to T\mathbb{R}^n$，$\iota_{U'} \colon TU' \to T\mathbb{R}^n$ を包含写像とする．$p \in U \cap U'$，$v \in \mathbb{R}^n$ とし，$(p, v) \in TU$ とすると，$\iota_U(p, v)$ は $\iota_{U'}$ の像に含まれ，$\iota_{U'}^{-1} \circ \iota_U(p, v) = (p, v)$ が成り立つ．

これらのことから，$T\mathbb{R}^n$ には $\{TU\}_{U \subset \mathbb{R}^n}$，ただし U は開集合，を座標近傍系とする多様体の構造が入ることが従う．詳しくは各自の演習問題とする．