

2026 年度幾何学 III 演習問題 1 v1

'26/10/5

改変履歴

'26/10/5 : (v1) 初版作成.

- 原則として講義のものと同じ記号を用いる.
- 「*」がついている問はやや進んだ事柄であったり, 専門的な事柄 (研究に近い事柄を扱わないとあまり現れない事柄) に関するものである. これらについては解くのは後回しにして構わない. 「*」の数が多いほどその度合いは高い. 一方, 数の多さと難易度は必ずしも正の相関にはない.
- 講義ノートから抜き書きしているもので, 参照している番号がおかしかったり, ??と表示されているかも知れない. 本当のところ何を指しているのかは前後から分かると思う.
- 記述がどうしてもおかしいと思ったら, まず記述を疑うこと (これは一般に, 本や論文を読む際にも必要な態度である)^{†1}.
- この資料を用いて実際に講義を行ったことはあまりないので, 検討が不十分である. 例えば記述の順序や, 記号・記法の選定などはあまり検討されていない.

定義 1.1.1. M, N を多様体とし, $\pi: E \rightarrow M, \rho: F \rightarrow N$ をベクトル束とする.

- 1) $f: E \rightarrow F$ が $\bar{f}: M \rightarrow N$ を覆うバンドル準同型あるいはバンドル写像であるとは,

$$\rho \circ f = \bar{f} \circ \pi,$$

$$p \in M \text{ とすると, } f|_{E_p} \text{ は線型写像である}$$

が成り立つことを言う. f を単にバンドル準同型あるいはバンドル写像と呼ぶことが少なくない. また, $M = N$ の場合には $\bar{f} = \text{id}_M$ とすることが少なくない.

- 2) $E = F, M = N$ とする. $f = \text{id}_E, \bar{f} = \text{id}_M$ として定まるバンドル写像を E の恒等写像^{†2}と呼ぶ.
- 3) バンドル写像 $f: E \rightarrow F$ がバンドル同型であるとは, バンドル写像 $g: F \rightarrow E$ が存在して $g \circ f = \text{id}_E, f \circ g = \text{id}_F$ が成り立つことを言う. このとき, g を f の逆写像と呼び^{†3}, $g = f^{-1}$ と表す. また, バンドル同型 $E \rightarrow F$ が存在するとき, E と F はバンドル同型であるという.

問 1.1.2. 1) バンドル写像の合成はバンドル写像であることを示せ.

- 2) バンドル同型 $E \rightarrow F$ が存在するならば, M と N は微分同相であることを示せ.
- 3) バンドル写像 $f: E \rightarrow F$ について, その逆写像は存在すれば一意であることを示せ.

^{†1}例えば本や論文を書く際にはかなり気をつけて推敲するが, この資料に関してはそこまでは詰めていない.

^{†2}バンドル恒等写像などと呼んだ方が分かりやすいが, あまりそうは呼ばない.

^{†3}バンドル逆写像と呼んだ方が正確だと思うが, あまりそうはしない.

問 1.1.3*. $f: M \rightarrow N$ とし, $\pi: E \rightarrow N$ をベクトル束とする. この時,

$$f^*E = \{(p, v) \in M \times E \mid f(p) = \pi(v)\},$$

とし, $f^*\pi: E \rightarrow M$ を

$$f^*\pi(p, v) = p$$

により定める. f^*E を E の f による引き戻しあるいは M と E の (f, π) に関するファイバー積と呼ぶ^{†4}. $(f^*E, f^*\pi)$ は M 上のベクトル束であって, また, $\text{rank } E$ が定まるならば $\text{rank } f^*E = \text{rank } E$ が成り立つことを示せ. また, $\tilde{f}: f^*E \rightarrow E$ を $\tilde{f}(p, v) = v$ により定めると図式

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ f^*\pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

は可換であることを示せ.

ヒント: $V \subset N$ を開集合とし, $\psi: \pi^{-1}(V) \rightarrow V \times \mathbb{R}^r$, $r = \text{rank } E$, を局所自明化とする. $U = f^{-1}(V)$ とすると, $\rho: (f^*\pi)^{-1}(U) (\subset M \times E) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$ が $\rho(p, \alpha) = (p, \text{pr}_2 \circ \psi(\alpha))$ により定まる.

問 1.1.4. $\bar{f}: M \rightarrow M$ を微分同相写像とする. また, $\pi: E \rightarrow M$, $\rho: F \rightarrow M$ をベクトル束とし, $f: E \rightarrow F$ は $\bar{f}$ を覆うバンドル写像であるとする. すると, F と f^*F はバンドル同型であって, $g: E \rightarrow f^*F$ を $g(e) = (\pi(e), f(e))$ により定めれば g は id_M を覆うバンドル写像であることを示せ.

定義 1.1.5. M, N を多様体, $f: M \rightarrow N$ を C^∞ 級の写像とする. $v \in TM$ とすると, $p \in M$ が一意的に存在して $v \in T_p M$ が成り立つ. また, $\epsilon > 0$ と $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ が存在して $v = [\gamma]$ が成り立つ. そこで $f_{*p}(v) = [f \circ \gamma] \in T_{f(p)} N$ と定める. f_{*p} を f の p における微分と呼ぶ. f_{*p} は $Df(p)$, Df_p などでも表す.

問 1.1.6. $f_{*p}(v)$ は well-defined であることを示せ. また, $V \subset N$ を開集合, $U = f^{-1}(V)$ とする. U, V はそれぞれ座標近傍であるとし, φ_U, φ_V をそれぞれ座標関数とする. また, $(x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ をそれぞれ $\varphi_U(U)$, $\varphi_V(V)$ の座標とする. このとき, $\varphi_V \circ f \circ \varphi_U^{-1} = (f_1, \dots, f_n)$ と表すと

$$(1.1.7) \quad f_{*p} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} (\varphi_U(p)) \frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_{f(p)}$$

が成り立つことを示せ. 従って, $\bar{f} = \varphi_V \circ f \circ \varphi_U^{-1}$ と置けば, $\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \Big|_p \right)$,

^{†4}どちらを用いるかは立場や文脈による.

$\left(\frac{\partial}{\partial y_1 f(p)}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n f(p)}\right)$ に関する f_{*p} の表現行列は $D\bar{f}(\varphi_U(p)) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\varphi_U(p))\right)$ に等しい.

このように、座標函数をいちいち記すと煩雑になるので、実際にはしばしば省略する. 例えば式 (1.1.7) は

$$f_{*p} \left(\frac{\partial}{\partial x_j p} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \frac{\partial}{\partial y_i f(p)}$$

などと表してしまったりする.

問 1.1.8. 定義 1.1.5 により定まる f_{*p} は TM から TN へのバンドル写像を定めることを示せ.

注 1.1.9. $f: M \rightarrow N$ とし, $U \subset M$ を開集合とする. このとき, $X \in \mathfrak{X}(U)$ について N の部分集合上のベクトル場 f_*X が定まるとは限らない. 実際, 異なる二点 $p, p' \in U$ について $q = f(p) = f(p')$ が成り立つとし, さらに $f_{*p}X(p) \neq f_{*p}X(p')$ とすると, $f_*X(q)$ を自然に定めることは一般にはできない. 一方, f_*X が定まる状況も幾つかあり, 重要である.

問 1.1.10. $f: M \rightarrow M$ を微分同相写像とする. この時, $X \in \mathfrak{X}(M)$ について $f_*X \in \mathfrak{X}(M)$ が

$$f_*X(p) = f_{*p}X(p)$$

により定まることを示せ.

※ f_*X が C^∞ 級であることも示す必要がある.

問 1.1.11 * $\pi: M \rightarrow N$ を被覆とし, $g: M \rightarrow M$ は $\pi \circ g = \pi$ を満たす微分同相写像とする (このような g を被覆変換 (covering transformation) と呼ぶ).

- 1) 被覆変換全体は, M の自己微分同相写像 (M から M 自身への微分同相写像) 全体のなす群 $\text{Diff}(M)$ の部分群をなすことを示せ.
- 2) $X \in \mathfrak{X}(M)$ とし, $g_*X = X$ が成り立つとすると, $\pi_*X \in \mathfrak{X}(N)$ が

$$\pi_*X(q) = X(p),$$

ただし $p \in \pi^{-1}(q)$, により定まることを示せ.

※ π_*X が C^∞ 級であることも示す必要がある.

問 1.1.12 * $f: M \rightarrow N$ とする. $X \in \mathfrak{X}(M)$ とすると, $f_*X \in \Gamma_M(f^*TN)$ が

$$f_*X(p) = (p, f_{*p}(X(p)))$$

により定まることを示せ.

※ この観点から言えば, f_*X が一般には定まらないのは $\tilde{f}: f^*TN \rightarrow TN$ があまり良くない写像であるから, ということになる.

例 1.1.13. $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ の部分集合 E を

$$E = \{(z, u) \in \mathbb{C}^2 \mid |z| = 1, u \in \mathbb{R}\sqrt{z}\}$$

により定め, 部分多様体の構造を入れる. ここで, $\mathbb{R}\sqrt{z}$ は $\sqrt{z}$ の取り方によらないので E は well-defined である. E は **メビウスの帯** (Möbuis band) の一つの実現である. さて, $\pi: E \rightarrow M = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ を

$$\pi(z, u) = z$$

により定める. $z \in S^1$ について $U_z = \{w \in S^1 \mid |\arg(w/z)| < \pi/6\}$ と置く.

$$\pi^{-1}(U_z) = \{(w, v) \in E \mid |\arg(w/z)| < \pi/6, v \in \mathbb{R}\sqrt{w}\}$$

である. 特に, $E_z = \pi^{-1}(\{z\}) = \{(z, u) \in E \mid u \in \mathbb{R}\sqrt{z}\}$ であるから, E_z は $(z, u) + (z, u') = (z, u + u')$, $\lambda(z, u) = (z, \lambda u)$ であるような実線型空間の構造を持つ. また, U_z 上で $\sqrt{\cdot}$ の枝を一つ選び, $\psi_z: \pi^{-1}(U_z) \rightarrow U_z \times \mathbb{R}$ を

$$\psi_z(w, v) = (w, v/\sqrt{w})$$

により定める. $\pi = \text{pr}_1 \circ \psi_z$ が成り立つ. また, $\psi_z|_{E_z}(z, u) = (z, u/\sqrt{z})$ であって, これは線型写像である. $z' \in S^1$ とし, $U_{zz'} = U_z \cap U_{z'} \neq \emptyset$ とする. $U_z, U_{z'}$ の定め方により $U_{zz'}$ は連結である. さて, $U_z, U_{z'}$ 上で定めた $\sqrt{\cdot}$ の枝をそれぞれ S, S' とする. このとき, $U_{zz'} \times \mathbb{R}$ 上で

$$\psi_z \circ \psi_{z'}^{-1}(w, t) = \psi_z(w, S'(w)t) = (w, S'(w)/S(w) \cdot t)$$

が成り立つ. $S'(w)/S(w) = \pm 1$ であって, 特に w に C^∞ 級に依存する. また, $t \mapsto S'(w)/S(w) \cdot t$ は線型写像である. 最後に, U_z を定めるときに偏角を $\pi/6$ ではなく, π とする. すると $U_{zz'}$ は連結でなくなり, 連結成分ごとに $S'(w)/S(w)$ は異なる値を取る (異なる写像を定める).

問 1.1.14. メビウスの帯について, $\psi_z(w, v) = (w, v/\sqrt{w} \cdot \exp(\text{re } w))$ とする. ψ_z は U_z 上の局所自明化であることを示せ. また, $\psi_z \circ \psi_{z'}^{-1}$ を求めよ.

※ この自明化は適当に取っただけで, 特に意味は無い.

問 1.1.15. (x, y, z) を $\mathbb{R}^3$ の標準的な座標とし, $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ を

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

により定める. また, (u, v) を $\mathbb{R}^2$ の標準的な座標, $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ を単位円周とする. 最後に, $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$\pi(x, y, z) = \left(\frac{x + yz}{1 + z^2}, \frac{y - xz}{1 + z^2} \right)$$

により定める.

- 1) $(x, y, z) \in \Sigma$ ならば $\pi(x, y, z) \in S^1$ が成り立つことを示せ.
- 2) $(u, v) \in S^1$ とする. $F_{(u,v)} = \pi^{-1}(u, v)$ と置くと $F_{(u,v)} \subset \Sigma$ が成り立つことを示せ. また, $F_{(u,v)}$ をなるべく簡潔に表せ.
- 3) π の Σ への制限を π_Σ とする. このとき, 微分同相写像 $\varphi: \Sigma \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ であって, 図式

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{\varphi} & S^1 \times \mathbb{R} \\ \pi_\Sigma \downarrow & & \downarrow p \\ S^1 & \xlongequal{\quad} & S^1 \end{array}$$

が可換となるようなものを一つ挙げよ. ここで, $p: S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1$ は第一成分への射影とする.

以下, 暫く $K = \mathbb{R}$ または $K = \mathbb{C}$ とする.

例 1.1.16 (射影空間). $v, w \in K^{n+1} \setminus \{o\}$ について $v \sim w \iff \exists \lambda \in K, v = \lambda w$ と定める. $\sim$ は同値関係となるので $KP^n = (K^{n+1} \setminus \{o\}) / \sim$ と置いて K 上の n 次元射影空間と呼ぶ. $n = 1, n = 2$ の時にはそれぞれ射影直線, 射影平面と呼ぶ. また, $K = \mathbb{R}$ の時には実射影空間 (直線, 平面), $K = \mathbb{C}$ の時には複素射影空間 (直線, 平面) とも呼ぶ. KP^n は $\mathbb{P}_K^n$ などとも表す. $p \in KP^n$ とすると, $u \in K^{n+1} \setminus \{o\}$ が存在して $p = [u]$, ただし $[u]$ は u の属する同値類, と表すことができる. $l_p = Ku$ とすると, l_p は u の選び方に依らず定まり, $u' \in Ku$ について $p = [u']$ が成り立つ. また, $l_{[u]} = Ku$ が成り立つ. 従って KP^n は K^{n+1} の原点を通る直線 (1 次元 K -部分線型空間) 全体と同一視される. また, $(K^{n+1})^*$ を K^{n+1} の双対空間とし, $H_p = \{\alpha \in (K^{n+1})^* \mid \alpha(u) = 0\}$ と置くと, L_p の場合と同様に, KP^n は H_p 全体のなす集合, 即ち, $(K^{n+1})^*$ の原点を通る超平面全体と同一視される. 計量を考えることにより $(K^{n+1})^*$ を K^{n+1} と同一視すれば, KP^n は K^{n+1} の原点を通る超平面全体と同一視される.

例 1.1.17 (標準線束). KP^n は K^{n+1} の原点を通る直線全体とみなせることに注意して

$$L = \{(p, v) \in KP^n \times K^{n+1} \mid v \in l_p\}$$

と置き, $\pi: L \rightarrow KP^n$ を $\pi(p, v) = p$ により定める. L はランク 1 のベクトル束である. $\pi: L \rightarrow KP^n$ を KP^n 上の標準線束 (tautological line bundle) などと呼ぶ. L は $L(-1)$ あるいは $L(-1; n)$ などでも表す.

例 1.1.18 (超平面束). KP^n は $(K^{n+1})^*$ の原点を通る超平面全体と同一視されることに注意して

$$H = \{(p, \alpha) \in KP^n \times (K^{n+1})^* \mid \langle p, \alpha \rangle = 0\}$$

と置き, $\pi: H \rightarrow KP^n$ を $\pi(p, \alpha) = p$ により定める. ここで, $\langle p, \alpha \rangle$ は $v \in l_p$ について $\langle p, \alpha \rangle = \langle v, \alpha \rangle$ により定める. $\langle p, \alpha \rangle$ は値そのものには意味が無いが, 0 であるか否かは

well-defined である. $\pi: H \rightarrow KP^n$ を KP^n 上の**超平面束** (hyperplane bundle) などと呼ぶ.

なお, K は一般の体でもよいが, ここで扱う多様体の範疇からは外れてしまう.

問 1.1.19*. M を C^∞ 級の多様体とし, $\pi: E \rightarrow M$ をベクトル束とする. また, M に自然な Lebesgue 測度を入れる. 切断として可測なものを許すことにすると, E の大域自明化で, M 上定義されているもの (測度 0 で定義されていないことは許さない) が構成できることを示せ.

このように, 切断として何でも良いことにしてしまうと位相的にはベクトル束を考えることにあまり意味がなくなってしまう. 一方, 微分方程式や力学系のような分野では可測な切断を考えることもしばしばある.

問 1.1.20. 1) $TS^1 \cong S^1 \times \mathbb{R}$ が成り立つことを示せ.

2) M をメビウスの帯 (例 1.1.13) とする. $TM \not\cong M \times \mathbb{R}^2$ が成り立つ. このことを説明せよ. 可能であれば証明せよ.

定義 1.1.21. $X \subset M$ とする. このとき,

$$C^\infty(X) = \{f|_X \mid X \text{ を含むある開集合 } U \text{ について } f \in C^\infty(U)\}$$

と定める.

問 1.1.22. 1) X が開集合ならば $C^\infty(X)$ は定義??による定義と一致することを確認せよ.

2) $C^\infty(X)$ は関数の和と積に関して単位可換環であることを示せ. また, 零元, 単位元 $0, 1$ はそれぞれ定数関数 $0, 1$ であることを確かめよ.

3) $X \subset Y \subset M$ ならば, 写像 (関数) の制限により環準同型 $C^\infty(Y) \rightarrow C^\infty(X)$ が定まることを示せ. また, この準同型について, 単射であるが全射では無い例, 全射であるが単射では無い例, 単射でも全射でも無い例を一つずつ挙げよ.

ヒント: $C^\infty(Y) \rightarrow C^\infty(X)$ が単射であることは, $C^\infty(Y)$ の元は X への制限で定まってしまうことを意味する.

$C^\infty(X)$ は関数の X 上での様子だけを気にしているが, X と M の関係をもっと反映させたい場合には, 例えば芽 (germ) を考える.

定義 1.1.23. $X \subset M$ とする. このとき, $\mathcal{F}(X) = \bigcup_{\substack{X \subset U \\ U: \text{open}}} C^\infty(U)$ と置く. また, $f, g \in \mathcal{F}(X)$ について,

$$f \sim g \iff X \text{ を含むある開集合 } U \text{ が存在して } f|_U = g|_U \text{ が成り立つ}$$

と定める．そして

$$G(X) = \mathcal{F}(X) / \sim$$

と置く． $G(X)$ の元は， C^∞ 級函数の X における芽 (germ) と呼ばれる^{†5}．

なお， $G(X)$ はここでの記号である．

- 問 1.1.24 *.
- 1) $G(X)$ は函数の和と積により単位可換環であることを示せ．また，零元，単位元 $0, 1$ はそれぞれ定数函数 $0, 1$ で代表されることを確かめよ．
 - 2) $X \subset Y \subset M$ ならば写像の制限により環準同型 $G(Y) \rightarrow G(X)$ が成り立つことを示せ．また，問 1.1.22 と同様に単射性，全射性について調べよ．
 - 3) $[f] \in G(X)$ について $f|_X \in C^\infty(X)$ を与える写像は well-defined であることを示せ．また，この写像について，単射性，全射性を調べよ．

問 1.1.25. M を多様体とし， $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ を M の開被覆とする．また，

$$\begin{aligned} C^1(\mathcal{U}; \mathbb{R}^r) &= \{\{\rho_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})\}\}, \\ C^2(\mathcal{U}; \mathbb{R}^r) &= \{\{\rho_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})\}\}, \\ C^3(\mathcal{U}; \mathbb{R}^r) &= \{\{\rho_{\alpha\beta\gamma}: U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})\}\} \end{aligned}$$

とする． $C^k((U); \mathbb{R}^r)$ の元を k -コチェインと呼ぶことにする．但し， $\rho_{\alpha\beta}$ を考える際には $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ とする． $\rho_{\alpha\beta\gamma}$ についても同様とする．さて， $\delta^1: C^1(\mathcal{U}; \mathbb{R}^r) \rightarrow C^2(\mathcal{U}; \mathbb{R}^r)$ ， $\delta^2: C^2(\mathcal{U}; \mathbb{R}^r) \rightarrow C^3(\mathcal{U}; \mathbb{R}^r)$ をそれぞれ

$$\begin{aligned} (\delta^1(\{\rho_\alpha\}))_{\alpha\beta} &= \rho_\alpha \rho_\beta^{-1}, \\ (\delta^2(\{\rho_{\alpha\beta}\}))_{\alpha\beta\gamma} &= \rho_{\beta\gamma} \rho_{\gamma\alpha} \rho_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

により定める．また， $1^3 \in C^3(\mathcal{U}; \mathbb{R}^r)$ を $1_{\alpha\beta\gamma} = \mathrm{id}$ により定める． $1^2 \in C^2(\mathcal{U}; \mathbb{R}^r)$ も同様に定める．

- 1) $\rho = \{\rho_\alpha\} \in C^1(\mathcal{U}; \mathbb{R}^r)$ とすると， $\delta^2 \circ \delta^1(\rho) = 1$ が成り立つことを示せ．
- 2) $\rho \in C^2(\mathcal{U}; \mathbb{R}^r)$ が問??のコサイクル条件を満たすことと， $\delta^2(\rho) = 1$ が成り立つことは同値であることを示せ．このような $\rho \in C^2(\mathcal{U}; \mathbb{R}^r)$ を **2-コサイクル** と呼ぶことにする．
- 3) 2-コサイクル $\rho \in C^2(\mathcal{U}; \mathbb{R}^r)$ により定まるベクトル束が自明であることと， $\exists \tau \in C^1(\mathcal{U}; \mathbb{R}^r)$ ， $\rho = \delta^1(\tau)$ が成り立つことは同値であることを示せ．
- 4) ρ, ρ' を 2-コサイクルとし，これらにより定まるベクトル束を E, E' とする． E, E' がベクトル束として同型であることと，1-コチェイン $\tau \in C^1(\mathcal{U}; \mathbb{R}^r)$ が存在して $\rho_{\alpha\beta} \tau_\beta = \tau_\alpha \rho'_{\alpha\beta}$ が成り立つことは同値であることを示せ．また，このことは 3) の一般化となっていることを確かめよ．

^{†5}芽は「め」とも「が」とも読むようである．伝統的に，一文字で表される用語は音読みをするので，それに従うならば「が」である．

