２０１９年度数理科学基礎（理Ｉ6,7,9,10 組向け，足助担当）演習問題 ４ v7 2019/6/18（火）
’19/6/7 :（v1）試験で少し間が開くので暫定的に作問.
’19/6/9 :（v2）問を追加.
’19/6/18 :（v3）問 4.1 の 6)，問 4.21 を追加.
’19/6/18 :（v4）問 4.1 にコメントを追加．問 4.6，問 4.7 の誤植を修正.
’19/6/19 :（v5）問 4.19 の 2) の誤植を修正.
’19/6/19 :（v6）細かい誤植の修正.
’19/7/2 :（v7）問 4.21 の 2) と 3) を入れ替え．問 4.14 を修正の上，コメントを追加.

線型空間・部分線型空間

問 4.1. 1) K^n は K-線型空間であることを示せ.

2) $K[x]$ は K-線型空間であることを示せ.

3) $F(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$-線型空間であることを示せ.

4) $S(K) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in K\}$ と置く（$S(K)$ はここでの記号である）．$S(K)$ は K に値を持つ数列全体のなす集合である．$a = (a_n),\ b = (b_n) \in S(K)$ について，数列 $a + b$ を $(a + b)_n = a_n + b_n$ により，$a \in S(K),\ \lambda \in K$ について数列 λa を $(\lambda a)_n = \lambda a_n$ によりそれぞれ定める．これらの演算について $S(K)$ は K-線型空間であることを示せ.

5*) X を集合，V を K-線型空間とする．$\mathrm{Map}(X, V) = \{f\colon X \to V\}$ と置く．$\mathrm{Map}(X, V)$ は X から V への写像全体のなす空間である．すると $\mathrm{Map}(X, V)$ は写像の和と定数倍に関して K-線型空間であることを示せ.

6) $M_{m,n}(K)$ は行列の和と定数倍に関して K-線型空間であることを示せ.

※ ある空間，例えば V が K-線型空間であることを示すためには，V とその演算が線型空間の定義（公理）を満たすことを確かめる必要がある．証明をある程度簡略化できることもあるが，その場合でも最終的には何らかの形で線型空間の定義を満たすことを示すことになる.

問 4.2. $f, g \in K[x]$ とする．このとき，$f, g\colon K \to K$ であるから，多項式の和（係数を足し合わせる）としての $f + g$ と，写像としての $f + g$ を考えることができる．定数倍についても同様である．これらは一致することを示せ.

問 4.21. V を線型空間とし，o を V の零元とする.

1) o は一意的であることを示せ.

2) $0v = o$ が成り立つことを示せ.

3) $v \in V$ とする．v の逆元 $-v$ は一意的であることを示せ．また，$-v = (-1)v$ が成り立つことを示せ（右辺は v の -1 倍である）．

問 4.3. V を線型空間，W, U を V の部分線型空間とする．このとき，$W \cap U$ は V の部分線型空間であることを示せ．

問 4.4. V を K-線型空間，$W, U \subset V$ を K-部分線型空間とする．$X \subset V$ は K-部分線型空間であって，$W \cup U \subset X$ が成り立つとする．この時，$W + U \subset X$ が成り立つことを示せ．

和空間や共通部分，より一般に部分線型空間を具体的に記述するにはもう少し用意が要るので，これについては後日扱う．

線型写像・線型変換

問 4.5. V を線型空間とする．

1) 恒等写像 $\mathrm{id}\colon V \to V$ は線型写像であることを示せ．定義域の V と値域の V を同一と考えるときには，この写像を V の**恒等変換**と呼ぶ．
2) $f\colon V \to V$ を $\forall v \in V,\ f(v) = o$ により定める．f は線型写像であることを示せ．f を**零写像**と呼ぶ．

問 4.6. 問 4.1 の記号を用いる．$r \in \mathbb{N},\ r > 0$ とする．また，$\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ とし，$S(K)$ の部分集合 V を

$$V = \{a = (a_n) \in S(K) \mid \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+r} + \lambda_1 a_{n+r-1} + \cdots + \lambda_r a_n = 0\}$$

により定める．

1) V は $S(K)$ の K-部分線型空間であることを示せ．
2) $f\colon V \to K^r$ を $a = (a_n) \in V$ について

$$f(a) = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{r-1} \end{bmatrix}$$

により定める．

   a) f は K-線型写像であることを示せ．
   b) f は全単射であることを示せ．
3) $S(K)$ は $K^n,\ n \in \mathbb{N}$ とは線型同型ではない（従って有限次元でない）．このことを以下に従って示せ．$f\colon K^n \to S(K)$ を線型同型写像とする．また，$e_1, \dots, e_n$ を K^n の基本ベクトルとし，$a(i) = f(e_i)$ とする．

a) $a \in S(K)$ とすると，$\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ が存在して

$$a = \lambda_1 a(1) + \cdots + \lambda_n a(n)$$

が成り立つ，即ち，任意の $m \in \mathbb{N}$ について

$$a_m = \lambda_1 a(1)_m + \cdots + \lambda_n a(n)_m$$

が成り立つことを示せ．

b) $1 \le i \le n+1,\ 1 \le j \le n$ について，$a_{ij} = a(j)_{i-1}$ とする．a) の結果を認めると，主張「$A = [a_{ij}] \in M_{n+1,n}(K)$ とすると，任意の $b \in K^{n+1}$ について，$\lambda \in K^n$ に関する方程式

$$A\lambda = b$$

は解を持つ」が成り立つことを示せ．

c) b) の主張は実際には成り立たないことを示せ．また，$S(K)$ は K^n と線型同型ではないことを示せ．

生成系，線型独立性と基底

問 4.7. $v_1, \ldots, v_r \in V$ とする．$\mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_r\}$ は V の部分線型空間であることを示せ．

問 4.8. $C^\infty(\mathbb{R}) = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ は } C^\infty \text{ 級}\}$ とする．$f_n, g_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ を

$$f_n(x) = \cos nx,\ \text{但し } n \in \mathbb{N},$$

$$g_n(x) = \sin nx,\ \text{但し } n \in \mathbb{N},\ n > 0$$

により定めると，任意の $N, M \in \mathbb{N}$（ただし $M > 0$）について $\{f_n, g_m\}_{\substack{0 \le n \le N \\ 1 \le m \le M}}$ は線型独立であることを示せ．

問 4.9. $v_1, \ldots, v_r \in V$ が線型従属であることと

$$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K,\ \exists i,\ 1 \le i \le r,\ \lambda_i \ne 0,\ \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = 0$$

が成り立つことは同値であることを示せ

問 4.10. V を K-線型空間とし，$v_1, \ldots, v_r \in V$ とする．

1) U を V の部分線型空間とし，$v_1, \ldots, v_r \in U$ とする．このとき，$\mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_r\} \subset U$ が成り立つことを示せ．

2) $\mathscr{U} = \{U \subset V \mid U \text{ は } V \text{ の部分線型空間であって，} v_1, \ldots, v_r \in U \text{ が成り立つ}\}$ と置く．このとき，$\mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_r\} = \bigcap_{U \in \mathscr{U}} U$ が成り立つことを示せ．

問 4.11. V を K-線型空間とし，$v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s \in V$ とする．

1) $\mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_r\} + \mathrm{Span}\{w_1, \ldots, w_s\} = \mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s\}$ が成り立つことを示せ．
2) $v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s$ からどのように $u_1, \ldots, u_p$ を選んでも（一つも選ばない場合も含む．この場合には $\{u_1, \ldots, u_p\} = \varnothing$ と考える），$\mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_r\} \cap \mathrm{Span}\{w_1, \ldots, w_s\} = \mathrm{Span}\{u_1, \ldots, u_p\}$ が成り立たないような V と $v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s$ の例を一組挙げよ．
   ヒント：$V = K^3$ として考えてみよ．実際には，後で定める V の次元が 3 以上ならばこのような $v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s$ は必ず存在する．逆に，V の次元が 2 以下であれば，このような $v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s$ は存在しない．興味があれば証明を考えてみよ．

問 4.12. V, W, U を線型空間，$f\colon V \to W,\ g\colon W \to U$ を線型写像とする．f, g が線型同型写像ならば $g \circ f\colon V \to U$ も線型同型写像であることを示せ．また，このとき $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ が成り立つことを示せ．

問 4.13*. V, W を線型空間，$f\colon V \to W$ を線型写像とする．f が線型同型写像であることと，f が全単射であることは同値であることを示せ．
※ 逆写像が線型写像であるかどうかが問題である．

問 4.14. V を線型空間とする．$\mathscr{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ を V の基底とし，$\varphi_{\mathscr{V}}\colon K^n \to V$ を

$$\varphi_{\mathscr{V}}\left(\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_n\end{bmatrix}\right) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \tag{4.14}$$

により定める．一方，$F\colon V \to K^n$ を次のように定める．即ち，$v \in V$ について

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

と $\lambda = [\lambda_i] \in K^n$ を用いて表し，$F(v) = \lambda$ と置く．

1) F はきちんと定まっている[†1]ことを示せ．
   ※ 写像が定まるためには，（今の場合）V の元 v に対して K^n の元 $F(v)$ を一意的に定める必要があるし，定めることができればよい．問題となるのは，i) そもそも $\lambda \in K^n$ が定まるのか，ということと，ii) 定めた λ は一意的なのか，ということである．
2) F は線型写像であって，$F \circ \varphi_{\mathscr{V}} = \mathrm{id}_V$ かつ $\varphi_{\mathscr{V}} \circ F = \mathrm{id}_{K^n}$ が成り立つことを示せ．

問 4.15. 線型空間 V と，V の部分線型空間 W を以下のように定める．W が実際に部分線型空間であることを確かめ，W の基底を一組求めよ．

[†1]日本語の文章であっても，well-defined である，と言う．

1) $V = K^n$, $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in K^n \;\middle|\; x_1 + \cdots + x_n = 0 \right\}$ とする．

2) $V = K^n$, $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in K^n \;\middle|\; x_1 + \cdots + x_n = 0,\ 2x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \right\}$ とする．

2) のように，連立一次方程式で表される K^n の部分線型空間はより詳しく調べることができる．このことについては後で述べる．

問 4.16. $V = K_n[x] = \{f \in K[x] \mid \deg f \leq n$ または $f = 0\}$ とする．また，$\mathscr{V} = (1, x, x^2, \ldots, x^n)$, $\mathscr{W} = (1, 1 + x, 1 + x + x^2, \ldots, 1 + x + x^2 + \cdots + x^n)$ と置く．

1) $\mathscr{V}$，$\mathscr{W}$ は共に V の（順序付き）基底であることを示せ．
   ※ 順序については気にしなくて良い．
2) $\mathscr{V}$ から $\mathscr{W}$ への基底の変換行列を求めよ．

問 4.17 *. $K[x]$ は線型空間であるが，有限生成ではないことを示せ．
ヒント；$\{f_1, \ldots, f_n\}$ を $K[x]$ の生成系とする．$f \in K[x]$ を，$\deg f$ が十分大きくなるように選ぶと，f は $f_1, \ldots, f_n$ の線型結合として表せない．

問 4.18. 1) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とする（$n \in \mathbb{N}$ について，$a_n \in K$ とする）．写像 $a\colon \mathbb{N} \to K$ を $a(n) = a_n$ により定めることができることを確かめよ．

2) 写像 $b\colon \mathbb{N} \to K$ が与えられたとき，数列 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $b_n = b(n)$ により定めることができることを確かめよ．
3) 1) と 2) により，数列全体のなす線型空間と，$\mathbb{N}$ から K への写像全体のなす線型空間の間の線型同型写像が与えられることを示せ．

問 4.19 *(次元の well-definedness の行列を用いない証明).
V を K-線型空間とし，$\{v_1, \ldots, v_n\}$，$\{w_1, \ldots, w_m\}$ を V の基底とする．必要なら v_i 達と w_j 達を入れ替えて $n \leq m$ とする．

1) ある $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$ であって，いずれかの λ_i は 0 でないようなものが存在して
$$v_1 = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m v_m$$
が成り立つことを示せ．
2) ある $j,\ 1 \leq j \leq m$，が存在して $\{v_1, w_1, w_2, \ldots, \widehat{w_j}, \ldots, w_m\}$ は V の基底であることを示せ．ここで，$\widehat{w_j}$ は w_j を取り除くことを意味する．

そこで，$w_1, \dots, w_{j-1}, w_{j+1}, \dots, w_m$ を改めて $w_2, \dots, w_m$ とする．

3) $w_2, \dots, w_m$ の番号（添字）を適当に（適切に）つけ直すと $\{v_1, \dots, v_n, w_{n+1}, \dots, w_m\}$ は V の基底であることを示せ．

   ヒント：1)，2) と基本的には同じことをすれば良い．

4) $n = m$ が成り立つことを示せ．

問 4.20. V を K-線型空間とし，$\{v_1, \dots, v_n\}$ を V の基底とする．また，W を K-線型空間とし，$w_1, \dots, w_n \in W$ とする．このとき，$f\colon V \to W$ が条件

$$f(v_i) = w_i$$

により一意的に定まることを示せ．

（以上）