２０１９年度数理科学基礎（理 I 6,7,9,10 組向け，足助担当）演習問題 1 v5　2019/4/9（火）

'19/4/4：初版作成

'19/4/6：第二版作成．問 1.12 と 1.13 を修正の上入れ替え．

'19/4/6：第三版作成．問 1.15 を追加．

'19/4/19：第四版作成．問 1.12 の 3) を追加．問 1.16 を追加．

'19/5/24：第五版．問 1.14 の誤植を修正．

- $*$ が付いている問題はやや難しい（かもしれない）ことを意味する．難しくとも解けることが期待されている問題もあるし，解けることは余り期待されていない問題もある．
- 時々ヒントを出すが，多くの場合ヒント自体が非自明なので証明を考えること．

基礎的な事項

問 1.1. 以下の主張が成り立つことを確かめよ．

1) $A = \{0,1\},\ B = \{1\}$ とする．$A \not\subset B$ と $A \supset B$ の両方が成り立つ．
2) $A = \{0,1\},\ B = \{1,2\}$ とする．$A \not\subset B$ は成り立つが，$A \supset B$ は成り立たない．
3) $A = B = \{0\}$ とする．$A \not\subset B$ は成り立たない，即ち $A \subset B$ は成り立つ．一方，$A \supset B$ は成り立つ．
4) $A = \{0\},\ B = \{0,1\}$ とする．$A \not\subset B$ も $A \supset B$ も成り立たない．

従って，$A \not\subset B$ と $A \supset B$ の間には論理的な関係はない．

問 1.2. $f\colon A \to B$ とする．

1) f が単射でないことと，
$$\exists\, a, a' \in A,\ a \neq a',\ f(a) = f(a')$$
が成り立つことは同値であることを確かめよ．
2) f が全射でないことと
$$\exists\, b \in B,\ \forall\, a \in A,\ b \neq f(a)$$
が成り立つことは同値であることを確かめよ．

問 1.3. 1) 命題「$A \Rightarrow B$」（A ならば B）の否定は
$$A \text{ が成り立ち，かつ } B \text{ が成り立たない}$$
と表されることを確かめよ．

2) $a \in \mathbb{R}$ とする．また，$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とし，$\delta, \epsilon > 0$ とする．$x \in \mathbb{R}$ に関する命題

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

の否定は

$$|x-a| < \delta,\ |f(x) - f(a)| \geq \epsilon$$

と表されることを確かめよ．

問 1.4. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $a \in \mathbb{R}$ において**連続**であるとは，

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ x \in \mathbb{R},\ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

が成り立つことを言う．

1) 上の定義を記号 $\forall$，$\exists$ を用いずに述べると，（例えば）
   任意の $\epsilon > 0$ について，ある $\delta > 0$ が存在して，$x \in \mathbb{R}$，$|x-a| < \delta$ が成り立つならば $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ が成り立つ．
   となることを確かめよ．
2) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $a \in \mathbb{R}$ において連続でないことは

$$\exists \epsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists x \in \mathbb{R},\ |x-a| < \delta,\ |f(x) - f(a)| \geq \epsilon$$

   が成り立つことと同値であることを確かめよ．

定義. A, B を集合とし，$f\colon A \to B$ を写像とする．また，$b \in B$ とする．$\forall a \in A,\ f(a) = b$ が成り立つとき，f を**定値写像**と呼ぶ．

問 1.5. A, B はいずれも空集合ではないとし，$f\colon A \to B$ を定値写像とする．以下が成り立つことを示せ．

1) $B = \{b\}$（一つの元からなる集合）であることと，f が全射であることは同値である．
2) $A = \{a\}$ であることと，f が単射であることは同値である．
3) $A = \{a\},\ B = \{b\}$ が成り立つことは f が全単射であることと同値である．

※ このようなことが成り立つのは f が定値写像だからであって，一般には状況はもっと複雑である．

問 1.6. A, B, C を集合とし，$f\colon A \to B$，$g\colon B \to C$ を写像とする．このとき，以下が成り立つことを示せ．

1) $g \circ f$ が単射ならば f は単射である．
2) $g \circ f$ が全射ならば g は全射である．
3) f, g が共に単射ならば $g \circ f$ は単射である．

4) f, g が共に全射ならば $g \circ f$ は全射である．

5) f, g が共に全単射ならば $g \circ f$ は全単射である．

2) のみ解を記す．間違っても暗記してはいけないが，参考にはすること（もっと簡潔に書くことが多いが，ここでは敢えて冗長にしてある）．

2) の解答例．主張

$$\forall c \in C,\ \exists b \in B,\ g(b) = c \tag{$*$}$$

が成り立つことを示せば良い．$c \in C$ とする．$g \circ f$ は全射だから，$\forall c \in C,\ \exists a \in A,\ c = g \circ f(a)$ が成り立つ．そこで $a \in A$ を $c = g \circ f(a)$ が成り立つものとする．$b = f(a)$ とすれば $b \in B$ であって $g(b) = g(f(a)) = g \circ f(a) = c$ が成り立つ．従って主張 $(*)$ が成り立つので，g は全射である． □

問 1.6 の逆の主張はほとんど全て成り立たない．

問 1.7. A, B, C を集合とし，$f\colon A \to B$，$g\colon B \to C$ を写像とする．

1) f は単射であるが $g \circ f$ は単射でないような例を一つ挙げよ．

2) g は全射であるが $g \circ f$ は全射でないような例を一つ挙げよ．

3) $g \circ f$ は単射であるが g は単射でないような例を一つ挙げよ．

4) $g \circ f$ は全射であるが f は全射でないような例を一つ挙げよ．

問 1.8. A, B を集合とし，$f\colon A \to B$ を写像とする．このとき，f の逆写像 g が存在することと，f が全単射であることは同値であることを示せ．
ヒント：問 1.6 を用いると容易である．

問 1.9***.** A, B を集合とし，$\pi\colon A \times B \to A$ を $\pi(a, b) = a$ により定める（左辺は $\pi((a, b))$ と表した方が定義には忠実であるが，記号が煩わしくなるのでしばしばこのように略記する）．

1) $f\colon A \to B$ が写像であるとき，$\Gamma = \{(a, b) \in A \times B \mid b = f(a)\}$ と置き，f の**グラフ**と呼ぶ．さて，π を（一般の $A \times B$ の元ではなく）Γ の元についてのみ考えたもの（π の Γ への**制限**と呼ぶ）を π_Γ で表す（$\pi_\Gamma\colon \Gamma \to A$ である）．すると π_Γ は全単射であることを示せ．

2) $\Gamma \subset A \times B$ とし，π の Γ への制限 π_Γ は全単射だとする．

   i)
   $$\forall a \in A,\ \exists b \in B,\ (a, b) \in \Gamma$$
   が成り立つことを示せ．また，このような b は一意的である，即ち，$a \in A$ について $(a, b), (a, b') \in \Gamma$ が成り立つならば $b = b'$ が成り立つことを示せ．

ii) $f\colon A \to B$ を，$a \in A$ について b を $(a,b) \in \Gamma$ なるような唯一の B として $f(a) = b$ により定める．この時，Γ は f のグラフと一致することを示せ．

行列

補題 1.10. 行列の積について，以下が成り立つことを示せ．

1) $A, A' \in M_{m,n}(K),\ B, B' \in M_{n,l}(K)$ とすると，

$$(A + A')B = AB + A'B,$$
$$A(B + B') = AB + AB'$$

が成り立つ．

2) $A \in M_{m,n}(K),\ B \in M_{n,l}(K),\ \lambda \in K$ とすると，

$$(\lambda A)B = \lambda(AB),$$
$$A(\lambda B) = \lambda(AB)$$

が成り立つ．

問 1.16. $A \in M_{m,n}(K)$ とする．

1) $E_m A = AE_n = A$ が成り立つことを示せ．
2) $O_m A = AO_n = O_{m,n}$ が成り立つことを示せ．また，$O_{r,m}A = O_{r,n}$，$AO_{n,s} = O_{m,s}$ が成り立つことを示せ．

問 1.11. 以下のように A, B を定める．AB が定まるのであれば AB を求め，定まらないのであればその旨述べよ．また，BA が定まるのであれば BA を求め，定まらないのであればその旨述べよ．

1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$　2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$　4) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

5) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$　6) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 \end{bmatrix}$

問 1.12. $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ とする．

1) $A^* = \overline{{}^t A} = {}^t\overline{A}$ が成り立つことを示せ．
2) $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ならば $A^* = {}^t A$ が成り立つことを示せ．
3) $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ならば ${}^t({}^t A)) = A$ が成り立つことを示せ．また，$A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ ならば $(A^*)^* = A$ が成り立つことを示せ．

問 1.13. $A, A' \in M_{m,n}(K)$, $B \in M_{n,l}(K)$, $\lambda \in K$ とする．このとき以下が成り立つことを示せ．

1) ${}^t(A+A') = {}^tA + {}^tA'$ が成り立つ．
2) ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$ が成り立つ．
3) ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ が成り立つ．
4) $K = \mathbb{C}$ とする．このとき $(AB)^* = B^*A^*$ が成り立つ．

また，

5) $\tau\colon M_{m,n}(K) \to M_{n,m}(K)$ を
$$\tau(A) = {}^tA$$
により定めると，τ は全単射であることを示せ．

問 1.14. $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ とする．このとき，$\mathbb{R}^2$ の部分集合 V を
$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \right\}$$
により定める．V は直感的には直線を表す．

1) $u, w \in V$ とする．ある $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ が存在して，$u = \lambda \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$, $w = \mu \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ が成り立つことを示せ．
2) $u, w \in V$ を 1) のように表す．このとき，$u = w$ が成り立つのは $\lambda = \mu$ が成り立つとき，その時のみであることを示せ．
3) $\varphi\colon \mathbb{R} \to V$ を
$$\varphi(\lambda) = \lambda \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$
により定めると，φ は $\mathbb{R}$ から V への全単射であることを示せ．

問 1.14 により，$\mathbb{R}$ の元と V の元には一対一の対応が付く．実際，$\lambda \in \mathbb{R}$ に対しては $\varphi(\lambda) \in V$ を考え，$v \in V$ については $v = \lambda \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ なる $\lambda \in \mathbb{R}$，即ち $v = \varphi(\lambda)$ が成り立つような唯一の $\lambda \in \mathbb{R}$ を考えれば良い．$\mathbb{R}$ の元はもちろん実数である，一方，V の元は $\mathbb{R}^2$ のベクトルであるから，一対一の対応があるものの，$\mathbb{R}$ と V は異なる．

定義. $m_1, \ldots, m_r, n_1, \ldots, n_s$ を正の整数とし，$m = m_1 + \cdots + m_r$, $n = n_1 + \cdots + n_s$ とする．$A \in M_{m,n}(K)$ を $A_{ij} \in M_{m_i,n_j}(K)$ を用いて
$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix}$$

と表す（考える）ことを A を**区分け**するなどという.

問 1.15. m_1, m_2, n_1, n_2 を正の整数とし，$m = m_1 + m_2$, $n = n_1 + n_2$ とする．$A \in M_{m,n}(K)$ とし，$A_{ij} \in M_{m_i,n_j}(K)$ を用いて A を $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ と区分けする．また，$A' \in M_{m,n}(K)$ とし，$A'_{ij} \in M_{m_i,n_j}(K)$ を用いて A と同様に区分けする．この時,

$$A + A' = \begin{bmatrix} A_{11} + A'_{11} & A_{12} + A'_{12} \\ A_{21} + A'_{21} & A_{22} + A'_{22} \end{bmatrix}$$

が成り立つことを示せ．また，$\lambda \in K$ とすると

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} \end{bmatrix}$$

が成り立つことを示せ.

（以上）