2018 年度線型代数学演習（理 I 36–39 組向け，足助担当）問題 30 v1
’19/1/14（月）
改変履歴．’18/1/14 :（v1）初版作成．総合演習であるが，飯田教員とは「作風」が異なることが大いに予想される．

以下，$K = \mathbb{R}$ あるいは $K = \mathbb{C}$ とする．

問 30.1. $t, s \in \mathbb{C}$ とし，$A \in M_3(\mathbb{C})$ を

$$A = \begin{bmatrix} t & 1 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

により定める．

1) $t = s = 0$ とする．$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ であって，$P^{-1}AP$ が対角行列であるようなものを一つ求めよ．また，その P について $P^{-1}AP$ を求めよ．
2) A が $\mathbb{C}$ 上対角化可能であるための t, s に関する必要十分条件を求めよ．

問 30.2. $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ とし，AB, BA は共に $\mathbb{C}$ 上対角化可能であるとする．また，$\mathbb{C}^n$ の（複素）線型変換 f を $f(v) = Av$ により定める（解答にあたっては「複素」は省略してよい）．

1) AB と BA の固有多項式は等しいことを示せ．
2) $\lambda \in \mathbb{C}$ を AB，BA の共通の固有値とする．$V(\lambda)$ を BA の，$W(\lambda)$ を AB の，それぞれ λ に属する固有空間とする．このとき $f(V(\lambda)) \subset W(\lambda)$ が成り立つことを示せ．
3) 2) の記号をそのまま用いる．$h\colon V(\lambda) \to W(\lambda)$ を $h(v) = f(v)$ により定める（h を f の $V(\lambda)$ への制限とする）．$\lambda \neq 0$ であれば h は（複素）線型同型写像であることを示せ．

問 30.3. $n \geq 3$ とする．$\mathbb{R}^n$ に標準計量を入れ，$\mathbb{R}^n$ の標準的なノルムを $\|\cdot\|$ で表す．

1) P を n 次の直交行列とする．つまり ${}^tPP = P\,{}^tP = E_n$ が成り立つとする．すると $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $\|Pv\| = \|v\|$ が成り立つことを示せ．
2) $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^n$ とし，a_1, a_2, a_3 は正規直交系である（$i, j = 1, 2, 3$ とすると $\|a_i\| = 1$ であって，$i \neq j$ ならば a_i と a_j は互いに直交する）とする．このとき，$b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}^n$ が，$k = 1, 2, 3$ についてそれぞれ $\|b_k - a_k\| < \dfrac{1}{100}$ をみたすならば b_1, b_2, b_3 は線型独立であることを示せ．

注：分母の「100」は大きな値を取っただけなので証明の方法によってはもっと小さくできる．このことに関しては気にせず，100 について示せば十分である．もし 100 よりも大きな値についてしか証明できないのであれば，取り敢えずその値について証明すること．ただしその場合には減点する．

問 30.4. $\mathbb{R}^4$ 上の対称双一次形式（対称双線型形式）f を，$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{bmatrix}$，$w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$ について

$$f(v,w) = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

と置くことにより定める．

1) $\mathbb{R}^4$ 上の二次形式 q を $q(v) = f(v,v)$ により定める．q の符号（signature）を求めよ．本問については答えのみを記せばよい．
2) $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$ とし，$v \neq o$（零ベクトル）とする．$W = \{w \in \mathbb{R}^4 \,|\, f(v,w) = 0\}$ とするとき，$\dim W$ を求めよ．また，W の基底を一組挙げよ．

問 30.5. $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ とし，$\mathbb{R}^5$ の部分集合 V_w を

$$V_w = \left\{ v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & -6 \\ 3 & -1 & 0 & -1 & -8 \\ 1 & 1 & -4 & 5 & 4 \end{bmatrix} v = w \right\}$$

により定める．

1) $V_w \neq \varnothing$ が成り立つための w に関する必要十分条件を求めよ．
2) $V_w \neq \varnothing$ が成り立つとする．このとき，適切な整数 r, n 及び $u_1, \ldots, u_r \in \mathbb{R}^n$ を

$$V_w = \{v \in \mathbb{R}^n \,|\, \exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R} \text{ s.t. } v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r\}$$

が成り立つように定めよ．但し，r はなるべく小さな値となるように定めること．

問 30.6. 以下の行列のそれぞれについて，正則であるならば逆行列を求め，正則でないのであればそのことを示せ．

1) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 10 \end{bmatrix}$　　　2) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

問 30.7. $A \in M_n(\mathbb{R})$ とし，$F\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ を次のように定める．$X \in M_n(\mathbb{R})$ であるとき，$X = (x_1\ \cdots\ x_n)$ と列ベクトルを用いて表し，

$$F(X) = \det(Ax_1\ x_2\ \cdots\ x_n) + \det(x_1\ Ax_2\ x_3\ \cdots\ x_n) + \cdots + \det(x_1\ \cdots\ x_{n-1}\ Ax_n)$$

と置く．また，$X \in M_n(\mathbb{R})$ について，X の (i,j)-成分を x_{ij} とするとき $\operatorname{tr} X = \sum_{i=1}^{n} x_{ii}$（対角成分の和）と定める．

1) $\forall X \in M_n(\mathbb{R}),\ F(X) = (\operatorname{tr} A)(\det X)$ が成り立つことを示せ．
2) $G\colon \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ とする．即ち，G は $\mathbb{R}$ 上定まった，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ に値を取る函数とする．また，G の (i,j)-成分を g_{ij} とする（即ち，$t \in \mathbb{R}$ の時 $G(t)$ の (i,j)-成分を $g_{ij}(t)$ と置くことにより $g_{ij}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を定める）と，g_{ij} は微分可能であるとする．このとき，$\dfrac{dG}{dt}$ を，(i,j)-成分が $\dfrac{dg_{ij}}{dt}$ であるような行列値函数とする．例えば $G(t) = \begin{bmatrix} t & t-1 \\ t^2+t+1 & t^2 \end{bmatrix}$ であれば $\dfrac{dG}{dt}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2t+1 & 2t \end{bmatrix}$ である．このように定めたとき，
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \operatorname{tr}\left(G(t)^{-1}\frac{dG}{dt}(t)\right) = \frac{d(\log\det G)}{dt}(t)$$
が成り立つことを示せ．なお，微分法に関する種々の基本的な公式は断らずに用いて良い．

問 30.8. $M_n(\mathbb{R})$ を行列の和，定数倍により線型空間とみなす（n は正の整数とする）．また，

$$S = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tX = X\}$$

と置く．S は $M_n(\mathbb{R})$ の部分線型空間である（このことは認めて良い）．

1) $A \in S$ とする．$\varphi\colon S \to M_n(\mathbb{R})$ を $\varphi(X) = AX + XA$ により定めると，φ は線型写像であることを示せ．また，実際には $\varphi(X) \in S$ が成り立つことを示せ．

2) と 3) では $n = 3$ とする．

2) $f\colon \mathbb{R}^6 \to S$ を $f(x_1, x_2, \ldots, x_6) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6 \end{bmatrix}$ により定めると f は線型同型写像であることを示せ．

3) $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_4 & a_5 \\ a_3 & a_5 & a_6 \end{bmatrix} \in S$ とし，$\varphi\colon S \to S$ を 1) のように，f を 2) のように定め，$\psi\colon \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ を $\psi = f^{-1} \circ \varphi \circ f$ により定める．ψ の表現行列[†1]を求めよ．

ここからは再び n は正の整数とする．

4) $M_n(\mathbb{R})$ の部分線型空間 U であって，$M_n(\mathbb{R}) = S \oplus U$ が成り立つ（教科書によっては $\oplus$ を $\dotplus$ で表すことがある）ものを一つ挙げよ．

5) 4) で求めた U の次元を求めよ．次元に関し，講義の定義と異なるものを用いる場合には定義も述べること．

問 30.9. $t, \theta \in \mathbb{R}$ とし，$A \in M_3(\mathbb{R})$ を

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

により定める．

1) A が $\mathbb{C}$ 上対角化可能であるための t, θ に関する必要十分条件を求めよ．対角化可能であるときには $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ であって，$P^{-1}AP$ が対角行列であるものを一つ求めよ．また，そのときの $P^{-1}AP$ も求めよ．

2) A が $\mathbb{R}$ 上対角化可能であるための t, θ に関する必要十分条件を求めよ．対角化可能であるときには $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ であって，$P^{-1}AP$ が対角行列であるものを一つ求めよ．また，そのときの $P^{-1}AP$ も求めよ．

※ 解答の方法によっては 1) と 2) は同時に解ける．無理に解答を分割する必要は無いが，同時に解いたときにはその旨明示すること．

問 30.10. $a, b, c \in \mathbb{R}$ とし，$\mathbb{R}^4$ の部分線型空間 V_1, V_2, V_3 を

[†1] 詳しく言えば $\mathbb{R}^6$ の標準基底に関する表現行列である．基底について未習であればこの注は気にしなくて良い．

$$V_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ a \\ b \end{bmatrix} \right\rangle = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ a \\ b \end{bmatrix},$$

$$V_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbb{R} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$V_3 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ c \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ c \\ 1 \end{bmatrix} + \mathbb{R} \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

により定める．これらが部分線型空間であることは認めて良い．

1) $V_1 + V_2$ は直和であることを示せ．

2) $V_1 + V_2 + V_3$ が直和であるための a, b, c に関する必要十分条件を求めよ．

問 30.11. $\mathbb{R}^4$ 上の二次形式 Q を，$v \in \mathbb{R}^4$ について $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ と表し，

$$Q(v) = Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = -{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2$$

と置くことにより定める．また，$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$ とし，a_1, a_2, a_3, a_4 の少なくとも一つは 0 でないとする．そして $\mathbb{R}^4$ の部分線型空間 H_a を

$$H_a = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0 \right\}$$

により定める（H_a が部分線型空間であることは認めて良い）．最後に，H_a 上の二次形式 q_a を，$v \in H_a$ について

$$q_a(v) = Q(v)$$

と置くことにより定める．

1) $a_1 = 0,\ a_2 = 1$ が成り立つとする．

i) H_a の順序付き基底を一組求め，その順序付き基底に関する q_a の表現行列を求めよ．

ii) $\operatorname{sgn} q_a$ を求めよ．

2) 一般の $a \in \mathbb{R}^4$ について $\operatorname{sgn} q_a$ を求めよ．

問 30.12. $\mathbb{R}^4$ に標準的なユークリッド計量を入れ，$v, w \in \mathbb{R}^4$ の内積を $\langle v \,|\, w \rangle$ で表す．また，$\mathbb{R}^4$ の部分線型空間 H を

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \right\}$$

により定める（H が部分線型空間であることは認めて良い）．

1) $v, w \in H$ について $\langle v \,|\, w \rangle_H = \langle v \,|\, w \rangle$ と置く．$\langle \cdot | \cdot \rangle_H$ は H のユークリッド計量であることを示せ．以下では $\langle \cdot | \cdot \rangle_H$ も $\langle \cdot | \cdot \rangle$ で表す．

2) H の順序付き正規直交基底を一組求めよ．正規直交基底であることも示すこと．これを $\mathscr{B}$ と置く（$\mathscr{B}$ が書きづらければ適宜別の文字を用いて良い．ただし，その場合にはその旨明示すること）．

3) $\mathscr{B}$ を拡大（延長）して得られる $\mathbb{R}^4$ の順序付き正規直交基底を一組求めよ．本問に限っては結果のみ解答すれば良い．

4) $\pi\colon H \to \mathbb{R}^3$ を

$$\pi \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

により定める．$\mathbb{R}^3$ のユークリッド計量 $g = g(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ で，条件

$$\forall\, v, w \in H,\ g(\pi(v), \pi(w)) = \langle v \,|\, w \rangle$$

を満たすようなものを一つ選び（定め），$\mathbb{R}^3$ の標準的な順序付き基底に関する g の表現行列を求めよ．もし条件を満たす g が存在しないのであればそのことを示せ．

問 30.13. 以下の行列のそれぞれについて，行列式を求め，正則であるかどうか理由（証明）と共に述べよ（必ずしも逆行列を具体的に求める必要は無い）．なお，行列式については計算結果を重視する．途中経過は簡潔に要点を述べれば良い．

1) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & -1 & 1 \\ x^2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，但し $x \in \mathbb{R}$ とする．

問 30.14. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in M_{4,5}(\mathbb{R}),\ c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$ とし，$\mathbb{R}^5$ の部分集合 V_c を

$$V_c = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \ \middle|\ Ax = c \right\}$$

により定める．

1) $\operatorname{rank} A$ を求めよ．

2) $V_c \neq \varnothing$ が成り立つための c に関する必要十分条件を求めよ．

3) $V_c \neq \varnothing$ が成り立つとする．このとき，適切な整数 k, n 及び $v_1, \ldots, v_k, a \in \mathbb{R}^n$ を

$$V_c = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R},\ x = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k + a\}$$

が成り立つように定めよ．但し，k はなるべく小さな値となるように定めること．

問 30.15. $A \in M_n(\mathbb{R})$ とする．$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} A^2 & A \\ A & I_n \end{bmatrix}$ を求めよ．

問 30.16. 1) $A \in M_n(\mathbb{R})$ とする．また，1 より大きいある自然数 $r \in \mathbb{N},\ r > 1$ が存在して $1 \leq k < r$ ならば $A^k \neq O_n$ が，また，$A^r = O_n$ がそれぞれ成り立つとする．このとき，$I_n + A$ は正則であることを示せ．また，逆行列を求めよ．

2) $A \in M_2(\mathbb{R})$ とし，A は正則でないとする．この時，$I_2 + A$ が正則であるならばそのことを示し，そうでなければ反例を一つ挙げよ．挙げた例が反例であることも示すこと．

3) $A \in M_n(\mathbb{R})$ とする．また，1 より大きいある自然数 $r \in \mathbb{N},\ r > 1$ が存在して $1 \leq k < r$ ならば $A^k \neq O_n$ が，また，$A^r = O_n$ がそれぞれ成り立つとする．$A^0 = I_n$ と約束し，

また，自然数 k について，$k! = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot k = k(k-1)!, & k > 0 \end{cases}$ と定める．このとき，$\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{k!} A^k = I_n + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \cdots + \frac{1}{(r-1)!}A^{r-1}$ は正則であることを示せ．また，逆行列を求めよ．

※ 1) と類似しているが，参考にしすぎると却って混乱すると思われる．

（以上）