2018 年度微分積分学演習（理 I 36–39 組向け，足助担当）問題 29 v1
’19/1/1（火）
改変履歴．’19/1/1：（v1）講義全体を踏まえて作題した．

問 29.1. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$f(x,y) = (x^2+y^2-1)(x-y^2-1)$$

により定める．

0) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\}$ の概形を図示せよ．
※ 単に「お絵かき」をすれば良い．
1) f の臨界点（停留点）を全て求めよ．
2) f の極大点，極小点のそれぞれについて存在するならば全て求め，存在しないならばそのことを示せ．

問 29.2. ここでは D は体積確定集合であることを認めて良い．
1) $D = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq 1\}$ とする．$\displaystyle\int_D dx_1 \cdots dx_n = \int_D 1\, dx_1 \cdots dx_n$ を求めよ．
2) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ とする．$\displaystyle\int_D \frac{1}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}\, dx\, dy\, dz$ を求めよ．

問 29.3. 1) 函数 f と点 p を以下のように定める．f の p におけるテーラー級数（剰余項のないテーラー展開）を求めよ．
a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ により定める．また，$p=1$ とする．
b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $f(x,y) = e^{x^2+2y}$ により定める．また，$p=(0,0)$ とする．
2) $\sin 1$ を小数点以下 3 桁以下を切り捨てることにより，小数点以下 2 桁（1/100 の位）まで求めよ（$\sin 1^\circ$ ではないので注意せよ）．
※ 仮に $\sin 1 = 1.028$ ならば答えは 1.02 であるし，あるいは $\sin 1 = 1.0301$ ならば答えは 1.03 である（このような値には絶対にならない．念のため）．

問 29.4. $\alpha \in \mathbb{R}$ とする．$I = (0,+\infty)$ とし，$\lambda > 0$ を変数とする函数 f_α を

$$f_\alpha(\lambda) = \int_I t^\alpha e^{-\lambda t^2}\, dt$$

により定める．

1) $\alpha > -1$ ならば $f_\alpha(\lambda)$ は収束し，$\alpha \leq -1$ ならば $f_\alpha(\lambda)$ は発散することを示せ．

2) $\alpha = n,\ n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ とする．$f_n(\lambda)$ を求めよ．

3) f_0 の $\lambda = \dfrac{1}{2}$ におけるテーラー級数（剰余項のないテーラー展開）と，その収束半径を求めよ．

※ 1) が解けなくとも，$f_\alpha(\lambda)$ が収束することを認めた上で 2)，3) について考えてみよ．

問 29.5. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$f(x, y) = x^2(x^2 - 1) + y^4$$

により定める．

1) f の臨界点（停留点）を全て求めよ．

2) f の極大点，極小点のそれぞれについて存在するならば全て求め，存在しないならばそのことを示せ．

問 29.6. ここでは D は体積確定集合であることを認めて良い．

1) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ とする．$\displaystyle\int_D \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2}\,dx\,dy$ を求めよ．

2) $D = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i,\ i = 1, \ldots, n,\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq 1\}$ とする．$\displaystyle\int_D dx_1 \cdots dx_n$ を求めよ．

問 29.7. $\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0$ とする．実数 x を変数とする，原点を中心とする冪級数

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha^n x^n = \alpha x + 2\alpha^2 x^2 + 3\alpha^3 x^3 + \cdots$$

について，以下の問に答えよ．

1) 冪級数 $(*)$ の収束半径を求めよ．

2) $\alpha = 1$ とし，1) で求めた収束半径を ρ とする．また，$x \in (-\rho, \rho)$ について，冪級数 $(*)$ の値を $S(x)$ で表す．このとき，x に関する多項式 $f, g,\ g \neq 0$ であって

$$\forall\, x \in (-\rho, \rho),\ S(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

が成り立つようなものを一組求めよ．f, g は必ずしも一意的ではないが，なるべく簡単なものを選ぶこと．

問 29.8. $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ を

$$f(\lambda) = \int_0^{+\infty} t e^{-\lambda t} \sin t\, dt$$

により定める．

1) $f(\lambda)$ を定める式の積分は $\lambda \in (0, +\infty)$ について収束することを示せ．

2) $f(\lambda)$ をなるべく簡潔に表せ．少なくとも積分記号は用いないこと．

問 29.9. 以下の不定積分のそれぞれについて，積分記号を含まない形で表せ．なお，積分の計算はある程度おおらかに行って良い．例えば分母が 0 になり得るか等の吟味は不要である．

1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x \cos x} dx$.

2) $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^3} dx$.

問 29.10. 1) $R \geq R' > 0$ とし，$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, R' \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq R\}$ と置く．$\displaystyle\int_D \frac{x^2}{x^2+y^2} dxdy$ を求めよ．

2) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$ と置く．$\displaystyle\int_D xy(x+y) dxdy$ を求めよ．

問 29.11.（注：本問においては $\mathbb{R}^3$ の元は列ベクトルを用いて表すが，解答の際には行ベクトルを用いても良い．ただし，両者を混在させないこと．）

$l\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ を C^1 級の曲線とする（必ずしも正則とは限らない）．すなわち，l はベクトル値函数とみなすと C^1 級であるとする．$s \in [0,1]$ の時，l の $l(0)$ から $l(s)$ までの長さ $L(s)$ を

$$L(s) = \int_0^s \|Dl(t)\|\, dt$$

により定める．ただし，$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ について，$\|v\| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2}$ と定める．

1) $l(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} \\ \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} \\ t \end{pmatrix}$ とする．$s \in [0,1]$ のとき，$L(s)$ を求めよ（積分記号を含まない形で表すこと）．

2) l は $l(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$l(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ をみたすとする．このとき $L(1) \geq 1$ が成り立つことを示せ．

3) $S \in \mathbb{R},\ S \geq 1$ とする．このとき，ある C^1 級の曲線 $l\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ であって，条件

a) $l(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ かつ $l(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) $L(1) = S$.

をみたすものが存在することを示せ.

問 29.12. 以下の積分（定積分，不定積分あるいは広義積分）を求めよ.

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{a+b\tan x}$，ただし a, b の少なくとも一方は 0 でないとする.

3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^{ax}+e^{-ax}}$，ただし $a > 0$ とする.

問 29.13. 次の極限（極限値）を求めよ.

1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$

2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_1^2 \log\left(n\sin\frac{x}{n}\right) dx$

問 29.14. $R > 0$ とし，S_R を $\mathbb{R}^3$ 内の，原点を中心とする半径 R の球面とする．即ち，

$$S_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 = R^2\}$$

と置く．また，$\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ について，S_R の部分集合 $D_R(\theta)$ を

$$D_R(\theta) = S_R \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z \geq R\cos\theta\}$$

により定める.

1) $r \geq 0$ を

$$D_R(\theta) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = \sqrt{R^2-x^2-y^2},\ x^2+y^2 \leq r^2\}$$

が成り立つように定める．r を R と θ を用いて表せ.

※ ここで間違えると 2) 以降について解答するのが困難になるので注意せよ.

2) $D_R(\theta)$ の概形を図示せよ.

3) r は 1) で求めたものとし，$B_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq r^2\}$ と置く．$f_R\colon B_R \to \mathbb{R}$ を $f_R(x,y) = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$ により定め，$A_R(\theta)$ を

$$A_R(\theta) = \int_{B_r} \sqrt{1+(D_x f_R(x,y))^2+(D_y f_R(x,y))^2}\,dxdy$$

により定める[†1]．ここで $D_x f_R = \dfrac{\partial f_R}{\partial x}$，$D_y f_R = \dfrac{\partial f_R}{\partial y}$ である．$A_R(\theta)$ を r を用いて（積分記号を含まない形で）表せ．

4) r が一定であるように R と θ が変化するとする．このとき，$\lim_{R\to+\infty} A_R(\theta)$ を求めよ．

問 29.15. $I = (-1,1)$ とし，I 上の函数 f を $t \in I$ について

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

と置くことにより定める．

1) f の $t=0$ を中心とするテーラー級数（剰余項のないテーラー展開）を求めよ．また，求めた級数（冪級数）の収束半径を求めよ．

2) I 上の函数 g を $x \in I$ について

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x\sin\theta)\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-x^2\sin^2\theta}} \end{aligned}$$

により定める．g の $x=0$ を中心とするテーラー級数を求めよ．また，求めた級数（冪級数）の収束半径を求めよ．

問 29.16. $a, b \in \mathbb{R}$，$a < b$ とし，$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ を連続な函数とする．このとき，f は $[a,b)$ 上広義リーマン可積分（広義リーマン積分可能）であって，$\int_{[a,b)} f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dx$ が成り立つことを示せ．ただし，f が $[a,b]$ 上リーマン可積分であることは証明せずに用いてよい．

問 29.17. 以下の各問に解答せよ．

1) $\displaystyle\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}dx$ を求めよ．

2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx$ を求めよ．ただし n は非負の整数とし，x に依らず $x^0 = 1$ と定める．

[†1]ちなみに $A_R(\theta)$ は $D_R(\theta)$ の面積である．このことを用いて解答する場合には，面積の定義と，$A_R(\theta)$ が $D_R(\theta)$ の面積であることの証明を与えること．

3) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0, y\geq 0, x-y\geq 0, x+y\leq 2\}$ と置く．D を図示し，$\displaystyle\int_D y(x+y)dxdy$ を求めよ．

問 29.18. 以下のように $[0,1]$ 上の函数列（函数族）$\{f_n\}$ を与え，$[0,1]$ 上の函数 f を $f(x)=\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ により定める．それぞれの場合について

i) f を求めよ，また，

ii)

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$$

が成り立つかどうか，証明とともに述べよ．ただし，いずれの場合にも n は 100 以上の整数とする（「100」は大きな数ならば，どんな値であっても解答には実質的な影響はないので，この値については気にしなくてよい）．

1) $f_n(x)=\dfrac{1}{1+\log\left(1+\dfrac{x}{n}\right)}$

2) $f_n(x)=\begin{cases} n\sin nx, & 0\leq x\leq \dfrac{\pi}{n}, \\ 0, & \dfrac{\pi}{n}<x \end{cases}$

問 29.19. $k\in(-1,1)$ とし，定数 R は $0\leq R<1$ をみたすとする．このとき，$f\colon(-1,1)\to\mathbb{R}$ を

$$f(k)=\int_0^R \frac{dr}{1+kr^2}$$

により定める．すると，主張

(∗) f は k に関して微分可能である．

が成り立つ．このことについて，以下の問に答えよ．

1) 主張 (∗) が成り立つことを，積分を具体的に求めずに（計算せずに）示すためにはどのような定理を用いればよいか，なるべく正確に述べよ．また，その定理を用いて，主張を証明せよ．
注：いくつか可能性はあるが，一通り述べればよい．また,「定理」という位なので，なるべく一般的な（適用範囲がある程度広い）形で述べよ．いくら正確であっても，あまりに特別な（例えばこの問にある函数にしか適用できないような）形で述べても意味に乏しい．

2) 今の場合には積分は実行可能である（初等函数を用いて具体的に求めることができる）．$f(k)$ を具体的に（積分記号を含まない形で）求め，その結果を用いることにより，主張 $(*)$ を少し簡単にした主張

$$(**) \qquad f \text{ は } k \text{ に関して連続である.}$$

が成り立つことを示せ．同様に，$f(k)$ の具体的な形を用いて主張 $(*)$ が成り立つことを示せ.

問 29.20. $c > 0$ とし，実数を変数（x とする）とする函数 f に関する微分方程式

$$Df = f^2,\ f(0) = c$$

を考える（$Df = \dfrac{df}{dx}$ である）.

1) 冪級数の収束半径や，f の定義域については後で（小問 2) で）考えることにし，とりあえず f は冪級数で与えられているとする．即ち，ある実数列 $a_0, a_1, \dots$ が存在して

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

が成り立つとする．ただし，x に依らず $x^0 = 1$ と定める．$Df(x)$ や $f(x)^2$ は冪級数を形式的に（収束性を無視して多項式のように）計算すれば求まると仮定して，a_n を c を用いて表せ.

2) 1) で求めた冪級数の収束半径を ρ とする．ρ を c の函数として表せ（定数であることもありうる）．もし収束半径が無限大なのであれば，そのことを示せ.

3) 2) で求めた収束半径を ρ とする．$\rho \neq 0$ であれば $I = (-\rho, \rho)$，$\rho = 0$ であれば $I = \{0\}$ と置く．また，$\rho = +\infty$ の場合には $I = \mathbb{R}$ と置く．1) で求めた f について，I 上の函数 g を

$$g(x) = (1 - cx) f(x)$$

により定める．g をなるべく簡潔に表せ.

問 29.21. $V = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ は連続}\}$ と置く．また，$g \in V$ とする（つまり，$g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ を
連続函数とする）とき，$F_g\colon V \to \mathbb{R}$ を

$$F_g(f) = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx$$

により定める．$g, h \in V$ について $F_g = F_h$ が成り立つ，即ち，$\forall f \in V,\ F_g(f) = F_h(f)$ が成り立つとき，$g = h$ が成り立つことを示せ．

（以上）