2018 年度線型代数学演習（理 I 36–39 組向け，足助担当）問題 28 v2
'18/12/28（金）
改変履歴．'18/12/28 :（v0）暫定版作成．二次曲線や二次曲面の古典的な扱いについて加筆する予定である（「古典的な扱い」は演習の試験範囲ではない．恐らく講義の試験範囲でもないが，確言はできない．なお，講義，演習いずれにおいても高校までで扱ったことに関しては試験範囲に含む）．
'18/12/31 :（v1）記号を全体的に修正したほか，問 28.2 に小問を追加．1/10 以降に「線型代数学」最終回の講義内容に応じて内容を追加する可能性がある．また，二次曲面の主軸については後日加筆する予定である．
'19/1/12 :（v2）二次曲面の主軸，主平面などについて加筆．問 28.2 と注 28.3 を追加．また，全般的にコメントの追加および修正を行った．

以下，$K=\mathbb{R}$ あるいは $K=\mathbb{C}$ とする．

問 28.1. 以下のように二次曲面 $S, S_c, S_{a,b,c}$ を定める．それぞれの名称を述べよ．
※ 演習に関しては名称を暗記する必要はない．講義に関しては，講義での指示に従うこと．

1) $S_c=\{{}^t[x,y,z]\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+cz^2-1=0\}$，ただし $c\in\mathbb{R}$.
2) $S_c=\{{}^t[x,y,z]\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+cz^2=0\}$，ただし $c\in\mathbb{R}$.
3) $S_c=\{{}^t[x,y,z]\in\mathbb{R}^3 \mid xy+yz+zx=c\}$，ただし $c\in\mathbb{R}$.
4) $S=\{{}^t[x,y,z]\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2+2xy+4yz-10zx-100=0\}$.
5) $S_{a,b,c}=\{{}^t[x,y,z]\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-z^2+2axy+2bxz+c=0\}$，ただし $a,b,c\in\mathbb{R}$.

問 28.2 *. $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を C^2 級とし，$f(0,0)=0$，$Df(0,0)=0$ とする[†1]．f のグラフを Γ とする．即ち，

$$\Gamma=\{{}^t[x,y,z]\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y)-z=0\}$$

と置く．また，$Hf(x,y)$ を ${}^t[x,y]$ における f のヘシアンとし，

$$h(x,y)=\frac{1}{2}[x\ y]Hf(0,0)\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

と定める．最後に，$X\in M_2(\mathbb{R})$ について $\|X\|=\sqrt{\operatorname{tr}{}^tXX}$ と定める．

1) $\forall\epsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \left\|{}^t[x,y]\right\|<\delta\Rightarrow\|Hf(x,y)-Hf(0,0)\|<\epsilon$ が成り立つことを示せ．

[†1] 二つ目の「0」は [0 0] の意味であるが，しばしばこのように書いてしまう．

2) $\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \left\| {}^t[x,y] \right\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - h(x,y)| < \epsilon \left\| {}^t[x,y] \right\|^2$ が成り立つことを示せ．

ヒント：テーラーの定理（定理 4.5.21）と，行列のノルムの性質を組み合わせて用いよ．

3) $G \in M_2(\mathbb{R})$ を $Hf(0,0)$ とは異なる行列とし，$Hf(0,0)$ の代わりに G を用いて h と同様に g を定める．このとき，2) の式は g については成り立たないことを示せ．

4) Σ を h のグラフとする．即ち，$\Sigma = \{{}^t[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \mid z = h(x,y)\}$ と置く．

a) $Hf(0,0)$ が正則ならば Σ は本来の二次曲面であることを確かめよ．より具体的には，楕円放物面あるいは双曲放物面であることを確かめよ．

※ この場合には f のグラフ Γ もおおよそ Σ と同じ形をしていて，いわゆるヘシアン判定法が有効である．Σ を少し「変形」して，臨界点の形を変形できるか（実際にはできない）実験してみよ．

b) $Hf(0,0)$ が正則でないとする．このとき，Σ は二次錐面あるいは柱面（楕円柱面，双曲柱面，放物柱面）のいずれかであることを確かめよ．

※ この場合には Σ の形は Γ の形に「似て」はいるが，臨界点の情報が保存されるほどには似ていない．そのためヘシアン判定法がうまく（全く）機能しない．Σ を少し「変形」して，臨界点の形を変形できるか（実際にはほとんど自由にできる）実験してみよ．

注 28.3. 問 28.4 の 2)，3) は h が ${}^t[0,0]$ における f の（ある意味で）最良の二次近似であることを示している．

※ これ以降のみで扱われている内容は「線型代数学演習」の試験範囲には含めない．

以下では $\mathbb{R}^2$ 内の二次曲線について扱う．$\mathbb{R}^2$ 内の二次曲線は円錐と平面の交わりとして得られることが古くから知られている[†2]．そこで $\mathbb{R}^2$ 内の二次曲線は**円錐曲線**と総称される．

問 28.4. $\widetilde{C} \subset \mathbb{R}^3$ を

$$\widetilde{C} = \{{}^t[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$$

により定める（記号「$\widetilde{\ }$」はチルダ（チルダー）と読む）．

1) $\widetilde{C}$ を図示し，円錐（を二つ自然に合わせた図形）であることを確かめよ．

[†2]少なくとも古代ギリシアでは知られていた．

2) $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ とし，${}^t[a,b,c]\neq 0$ とする．

$$H(a,b,c,d)=\{{}^t[x,y,z]\in\mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=d\},$$
$$C(a,b,c,d)=\widetilde{C}\cap H(a,b,c,d)$$

とするとき，$C(a,b,c,d)$ を分類せよ．

ヒント：現れる場合は楕円，双曲線，放物線，二直線，直線（実際には二本の直線が重なっている），一点のいずれかである．

3) $\widetilde{C}$ を定める式の左辺を二次形式と見なすと，符号は $(2,1)$ であることを確かめよ．

4) 2) とは逆に，平面は固定し，円錐を動かす．動かし方は色々あるが，ここでは

$$H=\{{}^t[x,y,z]\in\mathbb{R}^3 \mid z=1\},$$
$$\widetilde{C}(\theta)=\{{}^t[x,y,z]\in\mathbb{R}^3 \mid (\cos\theta x+\sin\theta z)^2+y^2-(-\sin\theta x+\cos\theta z)^2=0\}$$

を考える（問 26.30 も参照のこと）．

a) $H\cap\widetilde{C}(\theta)$ を分類せよ．

b*) $\widetilde{C}(\theta)$ は $\mathbb{R}P^2$ の図形を定めていると考えることができる．実際，$[x:y:z]\in\mathbb{R}P^2$ とし，${}^t[x,y,z]\in\widetilde{C}(\theta)$ とすると $\lambda\in\mathbb{R}$ について $\lambda{}^t[x,y,z]\in\widetilde{C}(\theta)$ が成り立つ．従って

$$\widehat{C}(\theta)=\{[x:y:z]\in\mathbb{R}P^2 \mid {}^t[x,y,z]\in\widetilde{C}(\theta)\}$$
$$=\{[x:y:z]\in\mathbb{R}P^2 \mid (\cos\theta x+\sin\theta z)^2+y^2-(-\sin\theta x+\cos\theta z)^2=0\}$$

と置くと $\widehat{C}$ はきちんと定まっている（well-defined である，と言う）．このことを確かめよ（上の証明らしきものが実際に証明となっていることを確かめよ）．

※ $[x:y:z]\in\mathbb{R}P^2$ とすると $\lambda\neq 0$ について $[\lambda x:\lambda y:\lambda z]=[x:y:z]$ が成り立つので，条件 ${}^t[x,y,z]\in\widetilde{C}(\theta)$ と ${}^t[\lambda x,\lambda y,\lambda z]\in\widetilde{C}(\theta)$ が同値であることを確かめないといけない．

c*)

$$\widehat{H}=\{[x:y:z]\in\mathbb{R}P^2 \mid z=1\}$$

と置く．$\widehat{H}$ と H の間には自然な全単射が存在することを示せ．また，

$$\widetilde{H}=\{{}^t[x,y,z]\in\mathbb{R}^3 \mid z\neq 0\}$$

と置くと

$$\widehat{H}=\{[x:y:z]\in\mathbb{R}P^2 \mid {}^t[x,y,z]\in\widetilde{H}\}$$

が成り立つことを示せ．従って，$\widehat{H}$ と H を同一視すれば H も $\widehat{C}(\theta)$ と同様に $\mathbb{R}P^2$ 内の図形を用いて表すことができる．

d*) $\widetilde{C}(\theta)$ の定める $\mathbb{R}P^2$ 内の図形を $\widehat{C}(\theta)$ とする．$H \cap \widetilde{C}(\theta) \subset \mathbb{R}^3$ と $\widehat{C}(\theta) \cap \widehat{H} \subset \mathbb{R}P^2$ の間には自然な全単射が存在することを示せ．

e*) $C(\theta) = \widehat{C}(\theta) \cap \widehat{H} = H \cap \widetilde{C}(\theta)$ と置く．$\widehat{C}(\theta)$ および $C(\theta)$ を分類せよ．
ヒント：前者は「分類」と言うものの場合は一つである．後者は楕円，双曲線，放物線のいずれかである（$\widehat{H}$ が特別な形をしているので，いくつかの場合が現れなくなる）．いわば $C(\theta)$ は $\mathbb{R}^2$ の二次曲線の見かけの形で，$\widehat{C}(\theta)$ はその背後にある，$C(\theta)$ の正体である．

注 28.5. $\mathbb{R}P^2$ と同様に $\mathbb{R}P^3$ と呼ばれる空間（多様体）も定義され，$\mathbb{R}^3$ 内の二次曲面は $\mathbb{R}P^3$ 内の図形と考えると見通しよく調べることができる．なお，$\mathbb{R}P^2$ には向きが付かなかったが，$\mathbb{R}P^3$ には向きが付く．

二次曲線や二次曲面の主軸

※ この節の記述は数学辞典第四版，岩波書店，を参考にした．

定義 28.6 (二次曲線の標準形と主軸). C を $\mathbb{R}^2$ 内の二次曲線とする．C が合同変換により以下のような二次曲線 C' に変換されるとき，C を**本来の二次曲線**（proper quadric curve）と呼ぶ．即ち，$a, b > 0$ とし，

1) $C' = \left\{ {}^t[x,y] \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$．この場合，$C$ を**楕円**と呼ぶ．特に $a = b$ の場合，**真円**と呼ぶことがある．
2) $C' = \left\{ {}^t[x,y] \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$．この場合，$C$ を**双曲線**と呼ぶ．特に $a = b$ の場合，**直角双曲線**と呼ぶことがある．
3) $C' = \{ {}^t[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = 4ax \}$．この場合，$C$ を**双曲線**と呼ぶ．

C' を C の**標準形**と呼ぶ．また，このように，C を標準形に写す変換を**主軸変換**と呼ぶ．

1) C が楕円である場合．
　まず C は標準形だとする．$L_1 = \{ {}^t[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \}$（$x$ 軸）および $L_2 = \{ {}^t[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \}$（$y$ 軸）を**主軸**と呼ぶ．また，a, b を主軸 L_1, L_2 の**長さ**と呼ぶ．$a > b$ である場合，L_1, L_2 をそれぞれ**長軸**，**短軸**，$a < b$ である場合 L_1, L_2 をそれぞれ**短軸**，**長軸**と呼ぶことがある．C が一般の場合には C を合同変換により標準形に写した上で主軸を考え，それを逆の合同変換で写したものを主軸とする．

以下では C は標準形とする．一般の場合は楕円の場合と同様に定める．

2) C が双曲線である場合．

$L_1 = \{{}^t[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$（$x$ 軸）および $L_2 = \{{}^t[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$（$y$ 軸）を**主軸**と呼ぶ．また，a, b を主軸 L_1, L_2 の**長さ**と呼ぶ．

3) C が放物線である場合．

$L = \{{}^t[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$（$y$ 軸）を**主軸**と呼ぶ．

問 28.7. C は楕円，双曲線あるいは放物線とする．楕円あるいは双曲線の場合には主軸変換は四つ，放物線の場合には二つ存在することを示せ．

問 28.8. 1) $C = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$ とすると，

$$C = \{{}^t[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \theta \in \mathbb{R},\ [x, y] = [a \cos\theta, b \sin\theta]\}$$

が成り立つことを示せ．

2) $C = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$ とすると，

$$C = \{{}^t[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid \exists t \in \mathbb{R},\ [x, y] = [a \cosh t, b \sinh t]\}$$

が成り立つことを示せ．

二次曲面についても同様であるが，変数が多いので場合が増え，複雑になる．

定義 28.9 (二次曲面の標準形と主軸，主平面)**.** S を $\mathbb{R}^3$ 内の二次曲面とする．S が合同変換により以下のような二次曲面 S' に変換されるとき，S を**本来の二次曲面**（proper quadric）と呼ぶ．即ち，$a, b, c > 0$ とし，

1) **楕円面**：$S' = \left\{ {}^t[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$．特に $a = b = c$ の場合，**球面**と呼ぶことがある．

2) **一葉双曲面**：$S' = \left\{ {}^t[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$．

3) **二葉双曲面**：$S' = \left\{ {}^t[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$．

4) **楕円放物面**：$S' = \left\{ {}^t[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z \right\}$．

5) **双曲放物面**：$S' = \left\{ {}^t[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z \right\}$．

S' を S の**標準形**と呼ぶ．また，このように，S を標準形に写す変換を**主軸変換**と呼ぶ．

以下では S は標準形とする．S が標準形でない場合には，二次曲線の場合と同様に，標準形を用いて主軸などを定める．

1) S が楕円面，一葉双曲面あるいは二葉双曲面である場合．

直線 $\{{}^t[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0\}$，$\{{}^t[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \mid x = z = 0\}$ 及び $\{{}^t[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\}$ を S の**主軸**と呼ぶ（それぞれ x 軸，y 軸，z 軸である）．また，平面 $\{{}^t[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$，$\{{}^t[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}$ 及び $\{{}^t[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ を S の**主平面**と呼ぶ（それぞれ yz 平面，zx 平面，xy 平面である）．

2) S が楕円放物面あるいは双曲放物面である場合．

直線 $\{{}^t[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\}$ を S の**主軸**と呼ぶ（z 軸である）．また，平面 $\{{}^t[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$ 及び $\{{}^t[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}$ を S の**主平面**と呼ぶ（それぞれ yz 平面，zx 平面である）．

注 28.10. 例えば円柱面 $S = \{{}^t[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ も図形的には二次元的な広がりを持っていて，本来の二次曲面とするのが良さそうにも思える．しかし，実際には S は二次曲線である円 $\{{}^t[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ と $\mathbb{R}$ の直積に分解され，この意味では二次曲線に由来している．そのため，円柱面は本来の二次曲面には含めない．円錐面 $S = \{{}^t[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ も本来の二次曲面ではない．円錐面は二次曲線と $\mathbb{R}$ の直積には分解されないので，円柱面より一見複雑に思えるが，二次曲線の時と同様に $\mathbb{R}P^3$ 内の図形と考えると $\widehat{S} = \{[x:y:z:w] \in \mathbb{R}P^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ が対応する．S は $\widehat{S}$ と平面（超平面）$\{[x:y:z:w] \in \mathbb{R}P^3 \mid w = 1\}$ との共通部分である．ここで，平面（超平面）$\{[x:y:z:w] \in \mathbb{R}P^3 \mid z = 1\}$ と $\widehat{S}$ との共通部分を考えると $\{[x:y:z:w] \in \mathbb{R}P^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ が得られるが，これは円柱である．より一般に断面が楕円や双曲線，放物線の場合であっても同様である．この場合には対応する曲面は柱面の場合には**楕円柱面**，**双曲柱面**，**放物柱面**と呼ばれる．錐面の場合にはひとまとめに**二次錐面**と呼ぶ．

問 28.11. 1) S を一葉双曲面とすると，任意の $p, q \in S$ について，連続写像 $l\colon [0,1] \to S \subset \mathbb{R}^3$ であって，$l(0) = p$，$l(1) = q$ が成り立つものが存在することを示せ．

※ これは S が**弧状連結**（特に連結）であることを意味する．

2) S を二葉双曲面とし，標準形だとする．$p = {}^t[p_1, p_2, p_3]$，$q = {}^t[q_1, q_2, q_3] \in S$ について，連続写像 $l\colon [0,1] \to S \subset \mathbb{R}^3$ であって，$l(0) = p$，$l(1) = q$ が成り立つものが存在することの必要十分条件は，$p_3 q_3 > 0$ が成り立つことであることを示せ．

※ このことから，S の**弧状連結成分**（今の場合には**連結成分**と同じことである）が二つであることが従う．

以下は高校までの内容の復習だと思われる．

二次曲線の円錐曲線としての扱い

※ この節の記述は数学辞典第四版，岩波書店，を参考にした．

$\|\cdot\|$ を $\mathbb{R}^2$ の標準的なノルムとする．

定理 28.12. 1) $C \subset \mathbb{R}^2$ を楕円とする．このとき，C を合同変換で適当に写すと（写したものを改めて C とする），$p, c \in \mathbb{R}$，ただし $c > p > 0$，が存在し，$P = (p, 0)$，$P' = (-p, 0)$ とすると

$$C = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - P\| + \|y - P'\| = 2c\}$$

が成り立つ．P, P' を C の**焦点**と呼ぶ．

2) $C \subset \mathbb{R}^2$ を双曲線とする．このとき，C を合同変換で適当に写すと（写したものを改めて C とする），$p, c \in \mathbb{R}$，ただし $p > c > 0$，が存在し，$P = (p, 0)$，$P' = (-p, 0)$ とすると

$$C = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |\|x - P\| - \|y - P'\|| = 2c\}$$

が成り立つ．P, P' を C の**焦点**と呼ぶ．また，二直線

$$L_{\pm} = \left\{ x = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; v = \pm \frac{\sqrt{p^2 - c^2}}{c} u \right\}$$

を**漸近線**と呼ぶ．

3) $C \subset \mathbb{R}^2$ を放物線とする．このとき，C を合同変換で適当に写すと（写したものを改めて C とする），$p \in \mathbb{R}$，ただし $p > 0$ が存在し，$P = (p, 0)$，$L = \{{}^t[u, v] \in \mathbb{R}^2 \mid u = -p\}$ とすると

$$C = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - P\| = d(x, L)\}$$

が成り立つ．ここで，$d(x, L)$ は x と L の距離である．ここでは $d(x, L)$ は x から L に下ろした垂線の長さに等しく，$d(x, L) = |x + p|$ が成り立つ．P を C の**焦点**，L を C の**準線**と呼ぶ．

注 28.13. ここでは x と P の距離を $\|x - P\|$ で表しているが，ユークリッド幾何の立場からは x と P の距離 $d(x, P)$ を $\|x - P\|$ と定めた上で，$\|x - P\|$ としているところを $d(x, P)$ に置き換えた方が自然である．

問 28.14. 定理 28.12 が成り立つことを示せ.

定義 28.15. $p > 0$ とし，$P = (p, 0)$，$L = \{{}^t[u, v] \in \mathbb{R}^2 \mid u = -p\}$ と置く．$e \geq 0$ とし，$C \subset \mathbb{R}^2$ を

$$C_e = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - P\| = ed(x, L)\}$$

により定める．P を C_e の**焦点**，L を C_e の**準線**，e を C_e の**離心率**と呼ぶ.

問 28.16. C を楕円，双曲線，放物線のいずれかとする．ただし，双曲線は大きく二つの部分（連結成分と呼ばれる）に分かれるが，そのうちの一方のみを考える．すると C は合同変換により定義 28.15 で与えられる C_e に写されることを示せ．より詳しく，C が楕円ならば $e < 1$，放物線ならば $e = 1$，双曲線ならば $e > 1$ が成り立つ．特に真円の場合には $e = 0$ が成り立つ．逆に C_e を定義 28.15 のように定めると，e の値に応じて C_e は楕円，放物線，双曲線のいずれかであることを示せ.

図を描くのが大変なので詳しくは省略するが，定理 28.12 や定義 28.15 は円錐あるいは $\mathbb{R}P^2$ を用いると明快に理解できる（数学辞典第四版，岩波書店，1121 ページやその前後を参照のこと）.

（以上）