2018 年度微分積分学演習（理 I 36–39 組向け，足助担当）問題 23 v6
'18/11/29（木）
改変履歴．'18/11/11：（v0）暫定版作成．概ね 11/19 の講義までの内容である．
'18/11/20：（v1）問 23.28 以降を追加．星の数を調整．
'18/11/25：（v2）問 23.42 は講義で扱うことにしたので削除．問 23.43 以降は番号を繰り上げ．
'18/11/25：（v3）問 23.42 を追加（v1 のものとは異なる）．それ以降の問は番号を繰り下げ（v1 と番号が同一となるようにした）．
'18/11/29：（v4）問 23.2 の誤植を修正．星の数とレイアウトを調整．
'18/12/9：（v5）問 23.43 の 6) を追加．
'18/12/13：（v6）問 23.26 を修正．関連して問 23.25 に小問を追加．

有界閉集合上の多変数函数の積分

問 23.1. (講義の）定義 5.2.1 において P, P' が共に K を含む閉区間の直積であるならば，f^* が P 上可積分であることと P' 上可積分であることは同値であって，また $\displaystyle\int_P f^*(x)dx = \int_{P'} f^*(x)dx$ が成り立つことを示せ．

問 23.2. $A \in M_{n,n-1}(\mathbb{R})$ について，$\operatorname{rank} A = n-1$ が成り立つことは $\det {}^t\!A\,A \neq 0$ が成り立つことと同値であることを示せ．また，$n = 2$ の時に，この条件を rank や det を用いずに A の成分を用いて表せ．

問 23.3. $r > 0$ とし，$S^n(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ を $S^n(r) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = r\}$ により定める．$S^n(r)$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の，区分的に C^1 級の超曲面であることを示せ．

問 23.4. $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ を区分的に C^1 級の超曲面とし，閉区間の直積 P に含まれるとする（問 23.7 も参照のこと）．$\chi_\Sigma \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を

$$\chi_\Sigma(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Sigma, \\ 0, & x \notin \Sigma \end{cases}$$

により定める．と $\displaystyle\int_P \chi_\Sigma(x)dx = 0$ が成り立つことを示せ．即ち，$\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ は体積確定集合であって，その体積は 0 に等しい．

問 23.4 は，Σ は n 次元の図形としては体積が 0 であるということを示しているが，$n-1$ 次元の図形としての体積がどうであるかについてはなにも主張していない．

問 23.5***.** $f\colon [0,1]^{n-1} \to \mathbb{R}$ を C^1 級とし，$g\colon [0,1]^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ を $g(t) = (t, f(t))$ により定める．$\Sigma = g([0,1]^{n-1})$ とすると，Σ は超曲面片であることを示せ．

Σ の $n-1$ 次元の図形としての面積は $\displaystyle\int_{[0,1]^{n-1}} \sqrt{1 + \|Df(t)\|^2} dt$ で与えられることが示せる（現時点ではやや難しい．問 23.22 も参照のこと）．

問 23.6. $g\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3$ を $g(x,y) = (x, y, \sqrt{1-x^2})$ により定める．$\Sigma = g([0,1]^2)$ として，Σ の（2 次元の図形としての）面積を求めよ．

問 23.7***.** 1) $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ を超曲面片とすると，Σ は有界閉集合であることを示せ．

ヒント：$x \in \Sigma$ について $\|x\|$ が有界であれば Σ は有界である．Σ が $f\colon [0,1]^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ により定義されているとして，$\|f\| : [0,1]^{n-1} \to \mathbb{R}$ を考えてみよ．また，Σ が閉集合であることは $(p_n) \subset \Sigma$ について $p = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n \in \mathbb{R}^n$ とすると（(p_n) が収束するかどうかは自明ではないが，p に収束すると仮定する）$p \in \Sigma$ が成り立つことと同値である（やや難しいので必要なら認めて良い）．$p_n = f(q_n)$, $q_n \in [0,1]^{n-1}$ と表して，(q_n) について考えてみよ．

2) $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ を区分的に C^1 級の超曲面とすると，Σ は有界閉集合であることを示せ．

問 23.8***.** $X \subset \mathbb{R}^n$ は有界で体積確定だとする．また，$f\colon X \to \mathbb{R}$ を有界な可積分函数とする．

1) $\mu = \dfrac{1}{v(X)} \displaystyle\int_X f(x)dx$ とすれば，$\displaystyle\inf_{x\in X} f(x) \leq \mu \leq \sup_{x\in X} f(x)$ かつ $\displaystyle\int_X f(x)dx = \mu v(X)$ が成り立つことを示せ．

2) X は閉集合だとし，また，**弧状連結**だとする．ここで，（有界とは限らない）集合 Y が弧状連結であるとは，

$$\forall p, q \in Y,\ \exists l\colon [0,1] \to Y,\ l \text{ は連続かつ } l(0) = p, l(1) = q$$

が成り立つことを言う．さて，f は連続とする．このとき，$\exists c \in X,\ \mu = f(c)$ が成り立つことを示せ．

ヒント:X は有界閉集合であるから，$a, b \in X$ が存在して $\displaystyle\inf_x x \in X = f(a)$, $\displaystyle\sup_x x \in X = f(b)$ が成り立つ．また，X は弧状連結であるので，$l\colon [0,1] \to X$ が存在して $l(0) = a,\ l(1) = b$ が成り立つ．$f \circ l$ について中間値の定理を用いよ．

問 23.9 *(問 23.25 も参照のこと)．$X \subset \mathbb{R}^n$ を有界とする．$c \in \mathbb{R}^n$ について $X_c = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in X,\ y = x + c\}$ と定める．X が体積確定であることと，X_c が体積確定であることは同値であって，これらが体積確定ならば $v(X) = v(X_c)$ が成り立つことを示せ．

以下では次の定理を示すことを目標とする．

定理 23.10 (講義の定理 5.5.1)．講義の記号をそのまま用いる．$f\colon I \to \mathbb{R}$ は有界だとする．また，f は I 上可積分であって，また，$x \in J$ を固定すると $f^x\colon K \to \mathbb{R}$ は K 上可積分であるとする．このとき，$F(x) = \displaystyle\int_K f^x(y)dy = \int_K f(x,y)dy$ と置くと F は J 上可積分であって

$$\begin{aligned}\int_I f(x)dxdy &= \int_J F(x)dx \\ &= \int_J \left(\int_K f^x(y)dy\right)dx \\ &= \int_J \left(\int_K f(x,y)dy\right)dx\end{aligned}$$

が成り立つ．さらに，$y \in K$ を固定すると $f^y\colon J \to \mathbb{R}$ は J 上可積分であるとする．このとき $G(x) = \displaystyle\int_J f^y(x)dx = \int_J f(x,y)dx$ と置くと G は J 上可積分であって

$$\int_I f(x)dxdy = \int_K \left(\int_J f(x,y)dx\right)dy$$

が成り立つ．

問 23.11 **．以下に従って定理 23.10 を示せ．

Δ を I の分割とする．

1) Δ は J と K の分割 $\Delta_J,\ \Delta_K$ であって，$\Delta = \Delta_J \times \Delta_K$ が成り立つものを自然に定めることを確かめよ．
2) 逆に $I = J \times K$ の時，$\Delta_J,\ \Delta_K$ をそれぞれ J, K の分割とすると，I の分割 Δ であって $\Delta = \Delta_J \times \Delta_K$ が成り立つものが自然に定まることを確かめよ．

$I_\alpha \in \mathcal{I}(\Delta)$ とすると，$I_\alpha = J_a \times K_b,\ J_a \in \mathcal{I}(\Delta_J),\ K_b \in \mathcal{I}(\Delta_K)$ とただ一通りに表すことができる．逆に，$J_a \in \mathcal{I}(\Delta_J),\ K_b \in \mathcal{I}(\Delta_K)$ であれば $J_a \times K_b \in \mathcal{I}(\Delta)$ が成り立つ．そこで $\mathcal{I}(\Delta_J) = \{J_1, \ldots, J_r\},\ \mathcal{I}(\Delta_K) = \{K_1, \ldots, K_s\}$ とし，$I_\alpha \in \mathcal{I}(\Delta)$ について $I_\alpha = J_a \times K_b$ が成り立つとき，この I を $I_{(a,b)}$ と表すことにする．さて，$I_{(a,b)} \in \mathcal{I}(\Delta)$ について

$$M_{(a,b)} = \sup_{z \in I_{(a,b)}} f(z),\ m_{(a,b)} = \inf_{z \in I_{(a,b)}} f(z)$$

と置く．

3) $x \in J_a$ とすると，

$$m_{(a,b)} \leq \inf_{y \in K_b} f(x,y),$$
$$M_{(a,b)} \geq \sup_{y \in K_b} f(x,y)$$

が成り立つことを示せ．

4) $f^x \colon K \to \mathbb{R}$ は仮定により可積分であることを踏まえて

$$m_{(a,b)} v(K_b) \leq \int_{K_b} f^x(y)dy \leq M_{(a,b)} v(K_b) \tag{23.12}$$

が成り立つことを示せ．

5)

$$\sum_{K_b \in \mathcal{I}(\Delta_K)} \int_{K_b} f^x(y)dy = \int_K f^x(y)dy = F(x)$$

が成り立つことを示せ．また，b について式 (23.12) の和を取ることにより

$$\sum_{K_b \in \mathcal{I}(\Delta_K)} m_{(a,b)} v(K_b) \leq F(x) \leq \sum_{K_b \in \mathcal{I}(\Delta_K)} M_{(a,b)} v(K_b) \tag{23.13}$$

が成り立つことを示せ．

6) 各 $J_a \in \mathcal{I}(\Delta_J)$ について $c_a \in J_a$ を選ぶ．式 (23.13) において $x = c_a$ としたものを考え，$v(J_a)$ を掛けてから a について和を取ることにより

$$\begin{aligned} \sum_{J_a \in \mathcal{I}(\Delta_J)} \sum_{K_b \in \mathcal{I}(\Delta_K)} m_{(a,b)} v(J_a) v(K_b) &\leq \sum_{J_a \in \mathcal{I}(\Delta_J)} F(c_a) v(J_a) \\ &\leq \sum_{J_a \in \mathcal{I}(\Delta_J)} \sum_{K_b \in \mathcal{I}(\Delta_K)} M_{(a,b)} v(J_a) v(K_b) \end{aligned} \tag{23.14}$$

が成り立つことを示せ．

7)

$$\sum_{J_a \in \mathcal{I}(\Delta_J)} \sum_{K_b \in \mathcal{I}(\Delta_K)} m_{(a,b)} v(J_a) v(K_b) = \underline{s}(f;\Delta),$$
$$\sum_{J_a \in \mathcal{I}(\Delta_J)} \sum_{K_b \in \mathcal{I}(\Delta_K)} M_{(a,b)} v(J_a) v(K_b) = \overline{s}(f;\Delta),$$

が成り立つことを示せ．

8) $c = \{c_\alpha\}$ とすると

$$\sum_{J_a \in \mathcal{I}(\Delta_J)} F(c_a) v(J_a) = s(F; \Delta_J, c)$$

が成り立つことを示せ．

従って式 (23.14) は

$$\underline{s}(f;\Delta) \le s(F;\Delta_J, c) \le \overline{s}(f;\Delta) \tag{23.15}$$

と書き換えられる．ここで $\varepsilon > 0$ が与えられたとする．f は I 上可積分であるから，$\delta(\Delta) \to 0$ の時，式 (23.15) の両端の辺は $\displaystyle\int_I f(z)dz$ に収束する．従って，$\delta > 0$ が存在して $\delta(\Delta) < \delta$ ならば $\left|\underline{s}(f;\Delta) - \displaystyle\int_I f(z)dz\right| < \epsilon$ と $\left|\overline{s}(f;\Delta) - \displaystyle\int_I f(z)dz\right| < \epsilon$ がそれぞれ成り立つ．

9) このとき，

$$|\overline{s}(f;\Delta) - \underline{s}(f;\Delta)| \le \left|\overline{s}(f;\Delta) - \int_I f(z)dz\right| + \left|\underline{s}(f;\Delta) - \int_I f(z)dz\right| < 2\epsilon$$

が成り立つことを示せ．

ここで Δ_J を $\delta(\Delta_J) < \dfrac{\delta}{2}$ であるような J の分割とする．Δ_K を $\delta(\Delta_K) < \dfrac{\delta}{2}$ であるような K の分割とし，$\Delta = \Delta_J \times \Delta_K$ とすると $\delta(\Delta) < \dfrac{\delta}{\sqrt{2}}$ が成り立つ．このとき，

$$\begin{aligned}
&\left|s(F;\Delta_J, c) - \int_I f(z)dz\right| \\
&\le |s(F;\Delta_J, c) - \underline{s}(f;\Delta)| + \left|\underline{s}(f;\Delta) - \int_I f(z)dz\right| \\
&= (s(F;\Delta, c) - \underline{s}(f;\Delta)) + \left|\underline{s}(f;\Delta) - \int_I f(z)dz\right| \\
&\le |\overline{s}(f;\Delta) - \underline{s}(f;\Delta)| + \left|\underline{s}(f;\Delta) - \int_I f(z)dz\right| \\
&< 3\varepsilon
\end{aligned}$$

が成り立つから，F は J 上可積分であって $\displaystyle\int_J F(x)dx = \int_I f(z)dz$ が成り立つ．

問 23.16. 定理 23.10 では $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ は n 個の変数を前半と後半に分けたが，$1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n$ とし，$j_1 < \cdots < j_q$ は $\{i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q\} = \{1, \ldots, n\}$ をみたすとし，$z \in \mathbb{R}^n$ を $z = (z_1, \ldots, z_n)$ と表して z に $((z_{i_1}, \ldots, z_{i_p}), (z_{j_1}, \ldots, z_{j_q})) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ を対応させることにより $\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ を同一視してみる．このとき，定理 23.10 を適切に書き換えよ．

問 23.17 (問 23.20 も類題である). 1) $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\in[0,1],\ x\le y\le 1\}$ とする．$\displaystyle\int_K dxdy$ を求めよ．

2) $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\in[-1,1],\ 0\le y\le\sqrt{1-x^2}\}$ とする．$\displaystyle\int_K dxdy$ を求めよ．

3) $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x^2+y^2\le 1,\ 4x^2+9y^2\ge 1\}$ とする．$\displaystyle\int_K dxdy$ を求めよ．

4) $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x^2+y^2\le 1,\ 4x^2+9y^2\ge 1\}$ とする．$\displaystyle\int_K (x+y)dxdy$ を求めよ．

5) $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\in[0,\pi/4],\ 0\le y\le\tan x\}\subset[0,1]^2$ とする．

$$\int_{[0,1]^2}\chi_K(x,y)dxdy=\int_K dxdy,$$
$$\int_0^1 dy\int_0^1\chi_K(x,y)dx,$$
$$\int_0^1 dx\int_0^1\chi_K(x,y)dy$$

をそれぞれ求めよ．

問 23.18 (カヴァリエリの原理). $X,Y\subset\mathbb{R}^n$ をそれぞれ区分的に C^1 級の超曲面に囲まれた有界閉集合とする[†1]．$t\in\mathbb{R}$ について

$$X_t=\{(x_1,\dots,x_n)\in X\mid x_n=t\},$$
$$Y_t=\{(x_1,\dots,x_n)\in Y\mid x_n=t\}$$

と置く（直感的には X_t,Y_t は $x_n=t$ による X,Y の断面である）と，$v_{n-1}(X_t)=v_{n-1}(Y_t)$ が成り立つとする．このとき，$v_n(X)=v_n(Y)$ が成り立つ．このことを以下に従って示せ．有界な閉区間の直積 $I\subset\mathbb{R}^{n-1}$，有界な閉区間 $J\subset\mathbb{R}$ が存在して $X,Y\subset I\times J$ が成り立つ．また，仮定により X_t,Y_t は体積確定である（実際には $\mathbb{R}^{n-1}$ 内の，区分的に C^1 級の超曲面である）．最後に，定義により $v_n(X)=\displaystyle\int_X\chi_X(x)dx$ が成り立つ．これらのことを踏まえて，$x=(x',t)$ とすると

$$\int_X\chi_X(x)dx=\int_J\left(\int_I\chi_X(x')dx'\right)dt=\int_J v(X_t)dt,$$
$$\int_Y\chi_Y(x)dx=\int_J\left(\int_I\chi_Y(x')dx'\right)dt=\int_J v(Y_t)dt$$

[†1] 体積確定集合であれば十分である．

が成り立つ．ことを示せ．また，任意の t について $v_{n-1}(X_t) = v_{n-1}(Y_t)$ が成り立つならば $v_n(X) = v_n(Y)$ が成り立つことを示せ．

問 23.19. $K_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq 1\}$ とする．

1*) K_n は有界閉集合であることを示せ．

2) $v(K_n) = \displaystyle\int_{K_n} dx_1 \cdots dx_n = \int_{0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq 1} dx_1 \cdots dx_n$ を求めよ．

3) K_n を図示せよ．

※ 場合によっては $K'_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 1 \geq x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq 0\}$ を考えたほうがわかりやすい．

※ この積分は**反復積分**（iterated integral）と呼ばれるものの一番簡単な例の一つである．

問 23.20 (問 23.17 も類題である)．次の積分を求めよ．

1) $\displaystyle\int_D dxdy$，$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$．

2) $\displaystyle\int_D dxdy$，$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$．

3) $\displaystyle\int_D dxdy$，$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$．

変数変換

問 23.21 (杉浦光夫他「解析演習」より一部改題)．$\mathbb{R}^2$ の部分集合 D を

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \exists t, s \in \mathbb{R},\ t \geq 0,\ s \geq 0,\ t + s \leq 1,\ (x,y) = t(\pi, 0) + s(\pi, \pi)\}$$

により定める．

1) D を図示せよ．

2) $\displaystyle\int_D \frac{y \sin x}{x} dxdy$ を累次積分（逐次積分）により二通りに表せ．

3) $\displaystyle\int_D \frac{y \sin x}{x} dxdy$ を求めよ．

問 23.22. $R > 0$ とし，S_R を $\mathbb{R}^3$ 内の，原点を中心とする半径 R の球面とする．即ち，

$$S_R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$

と置く．また，$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ について，S_R の部分集合 $D_R(\theta)$ を

$$D_R(\theta) = S_R \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq R\cos\theta\}$$

により定める．

1) $r \geq 0$ を

$$D_R(\theta) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},\ x^2 + y^2 \leq r^2\}$$

が成り立つように定める．r を R と θ を用いて表せ．

2) $D_R(\theta)$ の概形を図示せよ．

3) r は 1) で求めたものとし，$B_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$ と置く．$f_R \colon B_R \to \mathbb{R}$ を $f_R(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ により定め，$A_R(\theta)$ を

$$A_R(\theta) = \int_{B_r} \sqrt{1 + (D_x f_R(x, y))^2 + (D_y f_R(x, y))^2}\, dxdy$$

により定める．ここで $D_x f_R = \frac{\partial f_R}{\partial x}$, $D_y f_R = \frac{\partial f_R}{\partial y}$ である．$A_R(\theta)$ を r を用いて（積分記号を含まない形で）表せ．

※ ここでは直接計算することを想定しているが，面積の定義を知っていれば，$A_R(\theta)$ は $D_R(\theta)$ の面積であることを示し，このことを用いて解くこともできる．

4) r が一定であるように R と θ が変化するとする．このとき，$\lim_{R \to +\infty} A_R(\theta)$ を求めよ．

問 23.23. $S^n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid {x_0}^2 + \cdots + {x_n}^2 = 1\}$，$D^n = \{(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \mid {x_0}^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leq 1\}$ とし，$\varphi \colon D^n \to S^n$ を

$$\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}) = (x_0, \ldots, x_{n-1}, \sqrt{1 - {x_0}^2 - \cdots - {x_{n-1}}^2})$$

により定める．また．$f \colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x_0, \ldots, x_n) = \frac{x_0}{{x_0}^2 + \cdots + {x_n}^2}$$

により定め，

$$I = \int_{D^n} f \circ \varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}) \frac{\partial \sqrt{1 - {x_0}^2 - \cdots - {x_{n-1}}^2}}{\partial x_0} dx_0 \cdots dx_{n-1}$$

と置く．

1) 添字を入れ替えても積分 I は変化しないことを示せ．即ち，$\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$ とし，

$$I_\sigma = \int_{D^n_\sigma} f \circ \varphi(x_{\sigma(0)}, \ldots, x_{\sigma(n-1)}) \frac{\partial \sqrt{1 - {x_{\sigma(0)}}^2 - \cdots - {x_{\sigma(n-1)}}^2}}{\partial x_{\sigma(0)}} dx_{\sigma(0)} \cdots dx_{\sigma(n-1)},$$

ただし $D_\sigma^n = \{(x_{\sigma(0)}, \ldots, x_{\sigma(n-1)}) \in \mathbb{R}^n \mid {x_{\sigma(0)}}^2 + \cdots + x_{\sigma(n-1)}^2 \leq 1\}$，とすると $I_\sigma = I$ が成り立つことを示せ．

2) I を求めよ．

ヒント：$\sigma_k = (0\ k)$ とする[†2]．$I_{\sigma_0} + I_{\sigma_1} + \cdots + I_{\sigma_n}$ を考えてみよ．現時点では変数変換を用いるのが標準的であるが，興味があれば Gaußの発散定理を用いた計算も試みよ．定義には「北半球」しか現れないが,「南半球」もうまく用いると良い．

問 23.24. $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^3$ とし，$a_i = (x_i, y_i, z_i)$ とする．また，a_1, a_2, a_3 は線型独立とする．四面体 $oa_1a_2a_3$ の境界及び内部を X とするとき，X の体積を求めよ．ただし，$o = (0, 0, 0)$ は原点とする．

※ 積分を用いなくとも計算できるが，積分を用いた計算もしてみること．なお，問 23.26 を用いても解けるし，ここでは用いて構わないが，本来はこれは本末転倒である[†3]．

問 23.25*(問 23.9 も参照のこと)．$X \subset \mathbb{R}^n$ を有界とする．また，$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ について

$$X_A = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in X,\ y = Ax\}$$

と定める．

1) X が体積確定であることと，X_A が体積確定であることは同値であることを示せ．
2) 一般に，$Y \subset \mathbb{R}^n$ が有界閉集合であって，体積確定であるときに $v(Y) = \displaystyle\int_Y 1dx$ と定める．ここで「1」は常に 1 を取る定数函数である．X, X_A が体積確定ならば $v(X) = |\det A|\, v(X_A)$ が成り立つことを示せ．特に，$A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ について $v(X_A) = v(X)$ が成り立つことを示せ．

   ※ 直接示すならば，1) とほぼ同時に示すことができる．ここでは問 23.26 を用いても良い．

問 23.26. $X \subset \mathbb{R}^n$ を有界な体積確定集合とする[†4]．$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ とし，$X_A = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in X,\ y = Ax\}$ とする．$f\colon X \to \mathbb{R}$ を連続とすると

$$\int_{X_A} f(A^{-1}y)dy = \int_X f(x)\, |\det A|\, dx$$

[†2] 0 と k を入れ替える置換をこのように表すことがある．このように，二つのことなる文字を入れ替える置換を**互換**と呼ぶ．

[†3] 少なくとも講義での証明に従うと，循環論法に陥る．

[†4] おまじないと思っていれば良い（本当は積分が定まることを保証するのに用いているが，解くのに表だって用いる必要はない）．

が成り立つことを示せ．

問 23.27. 1) $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D_1 を

$$D_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 - y^2 + 1 \geq 0,\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq y\right\}$$

により定める．D_1 の概形を図示し，

$$\int_{D_1} y \frac{\sin x}{1 + x^2} dxdy$$

を求めよ．

2) $\mathbb{R}^3$ の部分集合 D_2 を

$$D_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, y^2 + z^2 \leq x^2,\ 0 \leq x\right\} \cap \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\right\}$$

により定める．D_2 の概形を図示し，

$$\int_{D_2} e^{-(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dxdydz$$

を求めよ．

広義積分

問 23.28. 以下の積分を求めよ．

1) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x \cos x}$　　2) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1 + x^2}}$　　3) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{a + b\tan x}$，ただし a, b の少なくとも一方は 0 でないとする．

5) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{e^{ax} + e^{-ax}}$，ただし $a > 0$ とする．

問 23.29. 1) $a, b \in \mathbb{R}$，$a < b$ とし，$f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ を可積分な函数とする（解答に困難を感じる場合にはとりあえず連続として良い）．このとき，f は (a, b) 上広義積分可能であって，$\displaystyle\int_{(a,b)} f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dx$ が成り立つことを示せ．また，(a, b) を $(a, b]$ あるいは $[a, b)$ としても同様のことが成り立つことを示せ．

2) $-\infty < a < b \leq +\infty$ とし，$f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ を連続な，広義可積分な函数とする．このとき，f は (a,b) 上広義可積分であって $\displaystyle\int_{(a,b)} f(x)dx = \int_{[a,b)} f(x)dx$ が成り立つことを示せ．また，$[a,b)$ を $(a,b]$ としても同様のことが成り立つことを示せ．

問 23.30. $-\infty < a < b \leq +\infty$ とし，$f, g\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ を連続函数とする．また，f, g は $[a,b)$ 上広義可積分であるとする．このとき，任意の $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ について $\lambda f + \mu g$ も $[a,b)$ 上広義可積分であって，

$$\int_{[a,b)} (\lambda f + \mu g)(x)dx = \lambda \int_{[a,b)} f(x)dx + \mu \int_{[a,b)} g(x)dx$$

が成り立つことを示せ．また，(a,b) を $(a,b]$ あるいは $[a,b)$ としても同様のことが成り立つことを示せ．

問 23.31. $a, b \in \mathbb{R}$，$a < b$ とし，$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ を連続とする．$\varepsilon > 0$ が与えられたとすると，$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ をみたす $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ と，$t_0, \ldots, t_{n-1} \in \mathbb{R}$ が存在して，$g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ を $g(x) = \begin{cases} t_i, & a_i \leq x < a_{i+1}, \\ t_{n-1}, & x = a_n \end{cases}$（最後は t_n の誤りではない）により定めると，$\displaystyle\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| < \varepsilon$ が成り立つことを示せ．

問 23.32. $a, b \in \mathbb{R}$，$a < b$ とし，$f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ を連続とする（ただし $n \in \mathbb{N}$）．また，函数 $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ について $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| = 0$ が成り立つとする．

1) f は連続であることを示せ．

2) 1) により f は $[a,b]$ 上可積分である．積分について，$\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ が成り立つことを示せ．

問 23.33 (リーマン・ルベーグの定理). $a, b \in \mathbb{R}$，$a \leq b$ とし，$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ を連続とする．このとき $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(x) \sin(\lambda x) dx = 0$ が成り立つことを示せ．
ヒント：問 23.31 と 23.32 を用いても良いし，直接示しても良い．ただ，直接示そうとしても（普通に証明すると）これらを用いたのと大差無いと思われる．

問 23.34 (後日 Laplace 変換を用いた計算方法についても出題する予定である).
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ を求める（被積分函数は $x = 0$ まで連続に拡張されるから，問 23.29 により 0 での振る舞いはあまり気にしなくて良いことに注意せよ）．

1) $g\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ を $g(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ により定める．g は連続であることを示せ．

2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{(2n+1)}{2}\pi} \frac{\sin x}{x}dx$ であるが，このことと，リーマン・ルベーグの定理（問 23.33）を用いて $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} \frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{1}{2}t}dt$ が成り立つことを示せ．

3) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{1}{2}t}dt$ と $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} \frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{1}{2}t}dt$ を求めよ．

4**) ※ 留数（residue）についての知識が必要なので，現時点では「ちんぷんかんぷん」で構わない[†5]．なお，理学部よりも工学部（の一定の学科）に進学する方が目にするのが早いと思われる．

x は複素数でも良いと考えることにして z で表すことにし，函数 $f(z) = \dfrac{e^{\sqrt{-1}z}}{z}$ を考える．f は $z=0$ 以外では正則（複素解析的）な函数であって，$z=0$ は一位の極（pole）である．$\delta, R_1, R_2 > 0,\ 0 < \delta < \min\{R_1, R_2\}$ とし，γ_{δ,R_1,R_2} を次のような積分路とする．まず $R_1, R_1+\sqrt{-1}R_2, -R_1+\sqrt{-1}R_2, -R_1$ を頂点とする長方形を考え，反時計回りの向きを入れる．この長方形から $-\delta$ と δ を結ぶ線分を取り去り，代わりに，原点を中心とする半径 δ の円周の下半分を考えてこれをつなぐ．向きは全体として反時計回りになるように自然に入れ，これを γ_{δ,R_1,R_2} とする．

4a) $\displaystyle\lim_{\substack{\delta\searrow 0\\ R_1\to+\infty\\ R_2\to+\infty}} \int_{\gamma_{\delta,R_1,R_2}} f(z)dz$ を求めよ．いかにも極限は簡単にとれるように書いてあるが，重極限（三重極限）なのでどのように取るか考える必要が（どのように取ってもよいことを示す必要が）ある．また，積分に関しては定義 23.37 や問 23.38 も参照のこと．

4b) 積分路 γ_{δ,R_1,R_2} は自然に六分割される．それぞれの部分での積分の極限での振る舞いについて考察して $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ を求めよ（ここでは 4a) の積分のうち虚部しか

[†5] すぐに解ければ（一変数複素解析的函数の）留数についてある程度理解できていると考えて良い．なお，S^1 に正の向きを入れると $\displaystyle\int_{S^1}\frac{dz}{z} = 2\pi\sqrt{-1}$ が成り立つ．これは留数定理の一番簡単な場合であって，このことを用いて例えば代数学の基本定理を証明することができる（問 23.38）．複素解析に関する入門書としては 複素解析，L.V. アールフォルス著，笠原乾吉訳と，複素函数論，H. カルタン著，高橋礼司訳を挙げておく．

必要にならないが，実部にもきちんと意味をつけることができて，**Cauchy** の主値と呼ばれる）.

問 23.35. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を実数列とする．$f\colon [0,+\infty)\to\mathbb{R}$ を

$$f(x)=a_n, \qquad \text{ただし } n\in\mathbb{N},\ x\in[n,n+1)$$

により定める.

1) $0\le t\le s\,(<+\infty)$ とすると f は $[t,s]$ 上リーマン可積分であることを示せ．また，$m,n\in\mathbb{Z}$ とするとき $\displaystyle\int_m^n f(x)dx$ を求めよ.

2) f が $[0,+\infty)$ 上広義リーマン可積分であることと，$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ が収束することは同値であることを示せ.
ヒント：定義により $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n=\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=0}^{m}a_n$ が成り立つ．また，$0\le t\le s$ とするとき，k,l をそれぞれ t,s を近似する整数（近似する方法は幾つかある）として $\displaystyle\int_t^s f(x)dx$ と $\displaystyle\sum_{n=k}^{l}a_n$ を比較してみよ．一般には誤差が生じるので，それを評価する必要がある.

3) 2) の同値な条件が成り立つとする．$\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)dx$ が絶対収束することと，$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ が絶対収束することは同値であることを示せ．また，$\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)dx$ が条件収束することと，$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ が条件収束することは同値であることを示せ.
ヒント：前半は 2) を $|f|$ と $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ に適用すれば良い．後半は前半をうまく使えばほとんど何もせずに示せる.

問 23.36. $(a_t)_{t\in\mathbb{R}}$ を $t\in\mathbb{R}$ を添字とする実数列とする（$t\mapsto a_t$ を函数とする，としても同じことである）.

1) 条件
   a) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}a_t$ が存在する.
   b) $\forall\epsilon>0,\ \exists M\in\mathbb{R},\ (t,s>M\Rightarrow|a_t-a_s|<\epsilon$ が成り立つ.

   は同値であることを示せ.

ヒント：b) が成り立つとすると，$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はコーシー列であるから収束する．収束極限を a とするとき，$|a_t - a|$ を考えてみよ．

2) 条件

a) $\displaystyle\lim_{t\to b-0} a_t$ が存在する．

b) $\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ b - \delta < t \leq s < b \Rightarrow |a_t - a_s| < \epsilon$ が成り立つ．

は同値であることを示せ．

ヒント：例えば $(a_{b-\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ を考えてみよ．

少し脱線

定義 23.37 (複素線積分)**.** ここでは $z \in \mathbb{C}$ を $x+\sqrt{-1}y,\ x,y \in \mathbb{R}$ と表すことにより $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ とみなす．$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を複素数値の函数とし，実部と虚部に分けて $f=u+\sqrt{-1}v$ と表す．$\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ を C^1 級の曲線とし，やはり実部と虚部に分けて $\gamma=\alpha+\sqrt{-1}\beta$ とする．この時，

$$
\begin{aligned}
&\int_\gamma f(z)dz \\
&= \int_a^b f\circ\gamma(t)\frac{d\gamma}{dt}(t)dt \\
&= \int_a^b \left(u\circ\gamma(t)\frac{d\alpha}{dt}(t) - v\circ\gamma(t)\frac{d\beta}{dt}(t)\right)dt \\
&\quad + \sqrt{-1}\int_a^b \left(u\circ\gamma(t)\frac{d\beta}{dt}(t) + v\circ\gamma(t)\frac{d\alpha}{dt}(t)\right)dt
\end{aligned}
$$

と定め，$\boldsymbol{\gamma}$ **に沿った** $\boldsymbol{f}$ **の（複素線）積分**と呼ぶ．

問 23.38. $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ とみなし，$z \in \mathbb{C}$ とする．

1) $\gamma(t)=e^{\sqrt{-1}t}=\cos t+\sqrt{-1}\sin t,\ t\in[0,2\pi]$ とする．$\displaystyle\int_\gamma z^n dz,\ n\in\mathbb{Z}$ を求めよ．
2) f を z の多項式とする．このとき，$\displaystyle\int_\gamma f(z)dz=0$ が成り立つことを示せ．
   ※ これは Cauchy の積分定理の特別な場合である．なお，Green の定理とも関連する．
3) $\displaystyle\int_\gamma e^z dz = \int_\gamma e^x(\cos y+\sqrt{-1}\sin y)dz = 0$ が成り立つことを示せ．ただし，$z=x+\sqrt{-1}y,\ x,y\in\mathbb{R}$ とする．
   ※ これも Cauchy の積分定理の特別な場合である．
4) $\displaystyle\int_\gamma \overline{z}^n dz,\ n\in\mathbb{Z}$ を求めよ．ここで $\overline{z}$ は z の複素共軛とする．

5**) $\gamma_R(t)=Re^{\sqrt{-1}t}$ とする．
   a) $R>0$ を十分大きく取れば $\forall t\in\mathbb{R},\ f\circ\gamma_R(t)\neq 0$ が成り立つことを示せ．
   b) $R>0$ を十分大きく取る．f を z に関する n 次多項式とすると
   $$\int_{\gamma_R}\frac{1}{f(z)}\frac{df}{dz}(z)dz=n$$
   が成り立つことを示せ．
   c) b) を用いて代数学の基本定理を示せ．

問 23.39 (Schwartz 超函数（distribution）のごく簡単な例).

$$T = \left\{ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} f\text{ は連続であって，また，ある } M \geq 0 \text{ が存在} \\ \text{して } |x| > M \Rightarrow f(x) = 0 \text{ が成り立つ} \end{array} \right\}$$

と置く（条件中の M は f に依存するので注意せよ）．また，$\delta_0\colon T \to \mathbb{R}$ を

$$\delta_0(f) = f(0)$$

により定める．

1) $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続とする．$f \in T$ とすると，$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)f(x)dx$ は実際には広義積分ではなく，値も有限であることを示せ．
2) $Y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $Y(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ により定める†6．$f \in T$ かつ f が C^1 級ならば
$$\delta_0(f) = -\int_{-\infty}^{+\infty} Y(x)\frac{df}{dx}(x)dx$$
が成り立つことを示せ．
3) $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続とする．$p \in \mathbb{R}$ について $G(p) \neq 0$ が成り立つならば，任意の $\epsilon > 0$ についてある $f_\epsilon \in T$ が存在して
   i) $\forall x \in \mathbb{R},\ f_\epsilon(x) \geq 0$,
   ii) $x \in \mathbb{R},\ |x - p| > \epsilon \Rightarrow f_\epsilon(x) = 0$,
   iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)f_\epsilon(x)dx \neq 0$

   が成り立つことを示せ．
4) 連続函数 $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ であって，条件
$$f \in T \text{ ならば } \delta_0(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x)f(x)dx (= f(0)) \text{ が成り立つ}$$
を満たす物は存在しないことを示せ．

多変数の広義積分

問 23.40 (これは実際には有界閉集合上の積分の話である). $f\colon D \to \mathbb{R}$ は連続とし，更に，$x \in D$ について $f(x) \geq 0$ が成り立つとする．また，$K_1, K_2 \subset D$ は体積確定な有界閉集合（例えば区分的に C^1 級の超曲面で囲まれた有界閉集合）とし，$K_1 \subset K_2$ が成り立つとする．

†6 Y はヘヴィサイド函数（Heaviside function）の類似である．ヘヴィサイド函数については $Y(0) = \dfrac{1}{2}$ とするのが通例であって，ここでの Y とは異なる．

1) $\displaystyle\int_{K_1} f(x)dx \le \int_{K_2} f(x)dx$ が成り立つことを示せ.

2) ある $p \in K_2 \setminus K_1$ と $r > 0$ が存在して，$\{q \in \mathbb{R}^n \mid \|q-p\| < r\} \subset K_2 \setminus K_1$ かつ $f(p) > 0$ が成り立つならば $\displaystyle\int_{K_1} f(x)dx < \int_{K_2} f(x)dx$ が成り立つことを示せ.

問 23.41 ****.** ここでは定義 5.7.12 の後半で用いた，(定義の仮定の下で)

$$\lim_{l \to +\infty} \int_{\overline{W_l}} f(x)dx$$

は $\{W_l\}$ の選び方に依らず一定の値に収束する，ことを示す.

1) $|f|$ は広義可積分であることを示せ．特に，$\displaystyle\lim_{l \to +\infty} \int_{\overline{W_l}} |f(x)|\, dx$ は $\{W_l\}$ の選び方に依らないことを示せ.

ヒント：定義 5.7.12 を，f を $|f|$ として読み替えると，補題 5.7.13 が上の主張そのものである.

$S_l = \displaystyle\int_{\overline{W_l}} f(x)dx,\ I_l = \int_{\overline{W_l}} |f|\,(x)dx$ と置く.

2) $m \ge l$ とすると，

$$|S_m - S_l| \le I_m - I_l$$

が成り立つことを示せ.

※ きちんと示すためには $\overline{W_l}$ が区分的に C^1 級の超曲面で囲まれていることを用いる必要があるが，今はあまり気にしなくて良い.

3) (S_n) はコーシー列であることを示せ.

そこで

$$S = \lim_{l \to +\infty} S_l$$

とする．また，

$$S'_m = \int_{\overline{U_m}} f(x)dx$$

と置く.

4) $\overline{W_{l'}} \subset \overline{U_m} \subset \overline{W_l}$ とすると

$$|S_l - S'_m| \le I_l - I_{l'}$$

が成り立つことを示せ.

※ やはり $\overline{W_l n}$ や $\overline{U_m}$ が区分的に C^1 級の超曲面で囲まれていることを用いる必要があるが，今はあまり気にしなくて良い.

$\epsilon > 0$ とする．

5) $L \in \mathbb{N}$ が存在して，$l > l' > L \Rightarrow I_l - I_{l'} < \dfrac{\epsilon}{2}$，かつ $l > L \Rightarrow |S - S_l| < \dfrac{\epsilon}{2}$ が成り立つことを示せ．

補題 5.7.13 の証明で示したように，$L' \in \mathbb{N}$ が存在して $U_{L'} \supset \overline{W_{l'}}$ が成り立つ．$m > L'$ ならば $U_m \supset U_{L'}$ が成り立つから，$U_m \supset \overline{W_{l'}}$ が成り立つ．

6) $l'' > L$ を $W_{l''} \supset \overline{U_m}$ なるように選べば，

$$|S'_m - S| \leq |S'_m - S_{l''}| + |S_{l''} - S| < \epsilon$$

が成り立つことを示せ．また，(S'_m) も S に収束することを示せ．

問 23.42. $k \in \mathbb{N}$ とする．$\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k e^{-x^2} dx$ は絶対収束することを示し，その値を求めよ．

問 23.43 (第 15 回も参照のこと)．$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$ と置く．$\mathit{\Gamma} \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ を

$$\mathit{\Gamma}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

により定める．$\mathit{\Gamma}$ を**ガンマ函数**と呼ぶ．また，$B \colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ を

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

により定める．B を**ベータ函数**と呼ぶ[†7]．

1) $\mathit{\Gamma}(x)$ を定める積分は絶対収束することを示せ．

2) ガンマ函数は次の等式（函数等式）をみたすことを示せ．ただし $x > 0$ とする．

   i) $\mathit{\Gamma}(x+1) = x\mathit{\Gamma}(x)$．

   ii) $\mathit{\Gamma}(1) = 1$．一般に $n \in \mathbb{N}$，$n > 0$ ならば $\mathit{\Gamma}(n) = (n-1)!$．

   iii) $\mathit{\Gamma}(x) > 0$．

   iv) $\mathit{\Gamma}(x) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{2x-1} dr$．

3) $B(x, y)$ を定める積分は絶対収束することを示せ．

4*) $B(x, y) = B(y, x) = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{2x-1}\theta)(\cos^{2y-1}\theta) d\theta$ が成り立つことを示せ．

[†7] ここでの B はギリシア文字（のつもり）である．通常はラテン文字と（ほぼ）同じ形であるようなギリシア文字（例えばアルファA やゼータ Z）は用いないが，このように例外的に用いることもある．ちなみにアルファ函数というのもあって，$A_n(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-xt} t^n dt$（$n = 1, 2, \ldots$）で定義される．

5*) $B(x,y)=\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ が成り立つことを示せ.
ヒント：二変数の広義積分と考えて座標変換するのが見やすい.

6) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ を求めよ.

問 23.44 (微分積分学，難波誠著，裳華房から改題の上引用).

$W=(0,1)\times(0,1)\subset\mathbb{R}^2$ と置く．また，$n\in\mathbb{N}$, $n>3$ について $W_n=\left(\dfrac{2}{n},1-\dfrac{1}{n}\right)\times\left(\dfrac{1}{n},1-\dfrac{1}{n}\right)$，$U_n=\left(\dfrac{1}{n},1-\dfrac{1}{n}\right)\times\left(\dfrac{2}{n},1-\dfrac{1}{n}\right)$ と置く.

1) $\overline{W_n}\subset W_{n+1}$，$\overline{U_n}\subset U_{n+1}$ および $W=\displaystyle\bigcup_{n=4}^{+\infty}W_n=\bigcup_{n=4}^{+\infty}U_n$ が成り立つことを示せ.

2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{\overline{W_n}}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy$ と $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{\overline{U_n}}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy$ は共に存在するが異なることを示せ.

3) $\displaystyle\int_W\left|\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right|dxdy$ は収束しないことを示せ．従って 2) の積分はどちらも絶対収束していない.

この例は一変数の場合と異なり，多変数（二変数以上）の広義積分は素朴に考えるとうまくいかないことを意味している．実際には絶対収束する広義積分以外のものを考えて（つまり，条件収束にあたるものを考えて）一般的な議論をしようとすると，何かしら破綻が生じる．一方，特定の函数（あるいは函数族）に関する，絶対収束しない積分もしばしば意味をもつので注意が必要である.

球面上の積分 **

講義では n 個の変数を用いて記述される，いわば「n 次元的な図形」は $\mathbb{R}^n$ やその部分集合に限って考えている．しかし，実際には球面は 2 次元的であるし，浮き輪の表面もそうである．このほかにも様々な n 次元的な図形が存在し，その上で微積分を行う必要がしばしば生じる．ここでは球面について簡単に扱う.

問 23.45 **. $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ とする．(x,y) におけるベクトル（例えば (x,y) を通る C^1 級の曲線の接ベクトルが念頭にある）(v,w) について[†8]，その長さ $\|(v,w)\|_{(x,y)}$ を

$$\|(v,w)\|_{(x,y)}=\frac{2}{1+x^2+y^2}\sqrt{v^2+w^2}$$

により定める（もし前半の $\dfrac{2}{1+x^2+y^2}$ が無ければ（1 に置き換えれば）(v,w) の通常の長さである．今はそうではなく，よくわからない補正項がついている）．

1) $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ を固定する．すると $\|\cdot\|$ は（線型空間）$\mathbb{R}^2$ のノルムを定めることを示せ．もしユークリッド計量（内積）は知っているが，ノルムは知らない場合には

$$g((v_1,w_1),(v_2,w_2))_{(x,y)}=\frac{4}{(1+x^2+y^2)^2}(v_1v_2+w_1w_2)$$

と置くと，$g(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{(x,y)}$ は $\mathbb{R}^2$ のユークリッド計量（内積）を定めることを示せ．

2) $l\colon[0,1]\to\mathbb{R}^2$ が C^1 級の（正則[†9]とは限らない）曲線であるとき，l の $l(0)$ から $l(s)$ までの長さ（$s\in[0,1]$）$L(s)$ を

$$L(s)=\int_0^s\|Dl(t)\|_{l(t)}\,dt$$

により定める（$\|\cdot\|$ は上で定めたものであることに注意）．

さて，$l_1,l_2\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ を $l_1(t)=\left(\cos\dfrac{\pi}{4}t,\sin\dfrac{\pi}{4}t\right)$，$l_2(t)=(1-t,t)$ により定める．l_1 の $l_1(0)$ から $l_1(1)$ までの長さを L_1，l_2 の $l_2(0)$ から $l_2(1)$ までの長さを L_2 とすると $L_1<L_2$ が成り立つことを示せ[†10]．

ここで，$S^2=\{(t,s,u)\in\mathbb{R}^3\mid t^2+s^2+u^2=1\}$ とし，$f\colon S^2\setminus\{(0,0,1)\}\to\mathbb{R}^2$ を

$$f(t,s,u)=\left(\frac{t}{1-u},\frac{s}{1-u}\right)$$

により定める．

3) f がどのような写像であるか，図を用いて説明せよ．

[†8] とりあえず $(v,w)\in\mathbb{R}^2$ と考えていればよいが，実際には (v,w) は (x,y) におけるベクトルなので，例えば $(1,0)$ を $p=(0,0)\in\mathbb{R}^2$ におけるベクトルと考えるときと，$q=(10,10)\in\mathbb{R}^2$ におけるベクトルとそれぞれ考えるときには区別するべきである．その意味で，$p\in\mathbb{R}^2$ におけるベクトル全体の成す線型空間を $T_p\mathbb{R}^2$ で表す．線型空間としては $T_p\mathbb{R}^2=\mathbb{R}^2$ である．このような考え方はベクトル場を考えるときなどに重要である．

[†9] $l\colon[0,1]\to\mathbb{R}^2$ は $Dl\neq0$ が $[0,1]$ 上成り立つとき，正則と言われるのであった．

[†10] 実際には $(1,0)$ と $(0,1)$ の $\|\cdot\|$ に関する距離 d を $d=\inf_l\displaystyle\int_0^1\|Dl(t)\|_{l(t)}\,dt$，ただし l は $(1,0)$ と $(0,1)$ を結ぶ,（区分的に）C^1 級の曲線全体を走る，により定めると $d=L_1$ であることが示せる．既に扱った道具ばかりで示せるが，現時点ではやや難しい．

4) f は全単射であることを示せ（$S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ から $\mathbb{R}^2$ への写像が C^∞ 級であることの定義を適切にすれば，f は微分同相写像である）．また，逆写像を求めよ（逆写像は $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^3 (\supset S^2 \setminus \{(0,0,1)\})$ への写像と考えると表しやすい）．

5) f の逆写像を g とする．ここで，g は $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^3$ への写像として表しておく．また，$\mathbb{R}^3$ の標準的なノルムを $\|\cdot\|''$ で表す．$(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ であれば $\|(a_1, a_2, a_3)\|'' = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$ である．さて，$(x, y) \in \mathbb{R}^2$，$(v, w) \in \mathbb{R}^2$ について

$$\|(v, w)\|'_{(x,y)} = \left\| Dg(x, y) \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \right\|''$$

と置く（ベクトル (v, w) を左辺では行ベクトル，右辺では列ベクトルで表しているので注意[†11]）．すると $\|(v, w)\|'_{(x,y)} = \|(v, w)\|_{(x,y)}$ が成り立つことを示せ（右辺は最初に定めた $\|\cdot\|$ である）．詳しくは述べないが，これは $\|\cdot\|$ が，球面上の標準的な長さ（ノルム）を平面に写して得られたものであることを意味する．

（以上）

[†11]悪い記法であるが右辺は行列の積なのであきらめる．読みやすさとの兼ね合いもあるが，本来はこのような記法は避けるべきである．もし避けがたければ本文のように明示すべきである．そうでなければ何が書いてあるのか読者にはわからない．