2018 年度幾何学 III 演習問題 9 v1

'18/12/26（火）

改変履歴．'18/12/26：（v1）初版作成．概ね 12/18（最終回）の講義までの内容である．

ここではこれまでの講義のすぐ延長上にある事柄や，これまで何らかの形で扱ってきた事柄で，講義で扱う予定であったが時間的に難しいと思われることについて扱う．この演習のみで扱われている事柄は試験範囲とはしないが，ここで扱うような事柄はさまざまな場面で現れ，重要である．少なくとも知っておいた方が知らないよりもまちがいなく得である．

Hodge star

定義 9.1. M を向きづけられた n 次元多様体とし，g を M の（TM の）計量とする．このとき，$\omega \in \bigwedge^r T_p^* M$ について $*\omega \in \bigwedge^{n-r} T_p^* M$ を条件

$$\forall \mu \in \bigwedge^r T_p^* M,\ g_p(\mu, \omega)\, d\mathrm{vol}_{g,p} = \mu \wedge *\omega$$

により定める．また，$\omega \in \Omega^r(U)$ について $*\omega \in \Omega^{n-r}(U)$ を $(*\omega)_p = *(\omega_p)$ により定める．$*\colon \bigwedge^r T_p^* M \to \bigwedge^{n-r} T_p^* M$ あるいは $*\colon \Omega^r(U) \to \Omega^{n-r}(U)$ を **Hodge 作用素**あるいは **Hodge star** と呼ぶ.

注 9.2. $\omega \in \Omega^r(U)$ について $*\omega$ は

$$\forall \mu \in \Omega^r(U),\ g(\mu, \omega)\, d\mathrm{vol}_g = \mu \wedge *\omega$$

を満たす．この条件はリーマン計量の場合には

$$\forall \mu \in \Omega^{n-r}(U),\ g(*\omega, \mu)\, d\mathrm{vol}_g = \omega \wedge \mu,$$

としても同値である．このように Hodge star を定めている文献もあるが，これをこのまま用いると例えばローレンツ計量の場合には一般的なものと符号が異なる．

以下では計量は原則としてリーマン計量とする．

例 9.3. $U \subset \mathbb{R}^2$ を開集合とする．また，$\mathbb{R}^2$ には標準的なリーマン計量が入っているとする．

1) $\omega, \mu \in \Omega^0(U) = C^\infty(U)$ とする．$*\omega \in \Omega^2(U)$ なので $*\omega = \alpha dx^1 \wedge dx^2$ とする．

$$\mu \wedge *\omega = \mu\alpha\, dx^1 \wedge dx^2,$$
$$\langle \mu \mid \omega \rangle = \mu\omega$$

が成り立つ．従って $\alpha = \omega$ なので $*\omega = \omega\, dx^1 \wedge dx^2$ が成り立つ．また，$\omega \wedge *\omega = \omega^2 d\mathrm{vol}_g$ が成り立つ．特に $\omega = 1$ の場合には $*\omega = dx^1 \wedge dx^2$，$\omega \wedge *\omega = d\mathrm{vol}_g$ が成り立つ．

2) $\omega = \omega_{12} dx^1 \wedge dx^2$ とし，$*\omega = \alpha$ とする．$\mu = \mu_{12} dx^1 \wedge dx^2 \in \Omega^2(U)$ について $\mu \wedge *\omega = \mu_{12}\alpha\, dx^1 \wedge dx^2$ が成り立つ．また，$\langle \mu \mid \omega \rangle = \mu\omega_{12}$ が成り立つ．よって $\alpha = \mu_{12}$ が成り立つので，$*\omega = \omega_{12}$ が成り立つ．また，$\omega \wedge *\omega = {\omega_{12}}^2 dx^1 \wedge dx^2$ が成り立つ．a) と合わせて，$r = 0, 2$ については $**\omega = \omega$ が成り立つ．特に $\omega = dx^1$ あるいは $\omega = dx^2$ の場合には $\omega \wedge *\omega = d\mathrm{vol}_g$ が成り立つ．

3) $\omega = \omega_1 dx^1 + \omega_2 dx^2$, $*\omega = \alpha_1 dx^1 + \alpha_2 dx^2$ とする．$\mu = \mu_1 dx^1 + \mu_2 dx^2$ とすると，$\mu \wedge *\omega = (\mu_1\alpha_2 - \mu_2\alpha_1) dx^1 \wedge dx^2$ が成り立つ．一方，$\langle \mu \mid \omega \rangle = \mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2$ が成り立つ．従って $\alpha_1 = -\omega_2$, $\alpha_2 = \omega_1$ なので $*\omega = -\omega_2 dx^1 + \omega_1 dx^2$ が成り立つ．特に $dx^1 = dx^2$, $*dx^2 = -dx^1$ が成り立つ．$r = 1$ については $**\omega = -\omega$ が成り立つ．また，$\omega \wedge *\omega = ({\omega_1}^2 + {\omega_2}^2) d\mathrm{vol}_g$ が成り立つ．

問 9.4. $\mathbb{R}^3$ に標準的なユークリッド計量（リーマン計量）を入れる．

1) $\omega = \omega_1 dx^1 + \omega_2 dx^2 + \omega_3 dx^3$ とすると $*\omega = \omega_1 dx^2 \wedge dx^3 + \omega_2 dx^3 \wedge dx^1 + \omega_3 dx^1 \wedge dx^2$ が成り立つことを示せ．
2) $\omega = \omega_{23} dx^2 \wedge dx^3 + \omega_{31} dx^3 \wedge dx^1 + \omega_{12} dx^1 \wedge dx^2$ とすると $*\omega = \omega_{23} dx^1 + \omega_{31} dx^2 + \omega_{12} dx^3$ が成り立つことを示せ
3) $\omega \in \Omega^r(\mathbb{R}^3)$，$r = 1, 2$ について $**\omega = \omega$ が成り立つことを示せ．
4) $\omega \in \Omega^0(\mathbb{R}^3)$ について，$*\omega = \omega dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ が成り立つことを示せ．また，$\omega = \omega_{123} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ について $*\omega = \omega_{123}$ が成り立つことを示せ．いずれの場合にも $**\omega = \omega$ が成り立つことを示せ．

問 9.5. $U \subset \mathbb{R}^n$ とする．$\omega \in \Omega^r(U)$, $\mu \in \Omega^{n-r}(U)$ について $g(\mu, *\omega) = (-1)^{r(n-r)} g(*\mu, \omega)$ が成り立つことを示せ．

問 9.6. $e_1, \ldots, e_n$ を T^*M の正規直交枠とする．

1) $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n = d\mathrm{vol}_g$ が成り立つことを示せ．
2) $*(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}) = \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} e_{i_{r+1}} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}$ が成り立つことを示せ．ここで $\{i_1, \ldots, i_n\} = \{1, \ldots, n\}$ とする．

これから次が従う．

補題 9.7. $\omega \in \Omega^r(U)$, $\mu \in \Omega^{n-r}(U)$ について $*\omega \wedge *\mu = (-1)^{r(n-r)} \omega \wedge \mu$ が成り立つ．

補題 9.8. $\omega \in \Omega^r(U)$ について $**\omega = (-1)^{r(n-r)}\omega$ が成り立つ．

<u>証明</u>. $\mu \in \Omega^{n-r}(U)$ とすると，

$$
\begin{aligned}
\mu \wedge **\omega &= g(\mu, *\omega)\, d\mathrm{vol}_g \\
&= (-1)^{r(n-r)} g(*\mu, \omega)\, d\mathrm{vol}_g \\
&= *\mu \wedge *\omega \\
&= (-1)^{r(n-r)} \mu \wedge \omega
\end{aligned}
$$

が成り立つ．μ は任意なので $**\omega = (-1)^{r(n-r)}\omega$ が成り立つ． □

補題 9.9. $\omega, \mu \in \Omega^r(U)$ とすると

$$
g(*\mu, *\omega) = g(\mu, \omega)
$$

が成り立つ．

<u>証明</u>. 補題 9.5 と 9.8 により

$$
g(*\mu, *\omega) = (-1)^{r(n-r)} g(**\mu, \omega) = g(\mu, \omega)
$$

が成り立つ． □

微分形式の空間に Hodge star を用いて内積を定めることができる．

$$
\Omega^r_c(U) = \{\omega \in \Omega^r(U) \mid \mathrm{supp}\,\omega \text{ はコンパクト}\}
$$

と置く．もし M が閉多様体ならば $\Omega^r_c(M) = \Omega^r(M)$ である．$\Omega^r_c(U)$ に以下のように計量を定める．

定義 9.10. $\omega, \mu \in \Omega^r_c(U)$ について

$$
(\mu, \omega) = \int_U \mu \wedge *\omega = \int_U g(\mu, \omega)\, d\mathrm{vol}_g
$$

と定める．

実際には $\mu \wedge *\omega \in \Omega^n_c(U)$ ならば (μ, ω) は定まる．

一般に，g が計量ならば $(\cdot, \cdot)$ は定まって，対称双線型形式である．特に g がリーマン計量であれば $(\cdot, \cdot)$ はユークリッド計量である．

Hodge star を用いて以下のように定める．

定義 9.11. $\delta\colon \Omega^r(U) \to \Omega^{r-1}(U)$ を

$$\delta = \begin{cases} (-1)^r *^{-1} d*, & r > 0, \\ 0, & r = 0 \end{cases}$$

により定め，**余微分**と呼ぶ．

補題 9.12. $r > 0$ とすると $\delta = (-1)^{nr+n+1+\sigma} * d *$ が成り立つ．

<u>証明</u>. $k(k-1)$ は偶数であるから，$(-1)^{k^2} = (-1)^k$ が成り立つ．$\omega \in \Omega^r(U)$ について，$d{*}\omega \in \Omega^{n-r+1}(U)$ であるから，補題 9.8 により

$$\begin{aligned} \delta &= (-1)^r(-1)^{(n-r+1)(n-(n-r+1))+\sigma} * d * \\ &= (-1)^{r+(n-r+1)(r-1)+\sigma} * d* \\ &= (-1)^{r+nr-n-r+1+\sigma} * d* \\ &= (-1)^{nr+n+1+\sigma} * d * \end{aligned}$$

が成り立つ． □

定理 9.13. $(d\omega, \mu) = (\omega, \delta\mu)$ が任意の $\omega \in \Omega_c^{r-1}(U),\ \mu \in \Omega_c^r(U)$ について成り立つ．

<u>証明</u>.

$$\begin{aligned} (d\omega, \mu) &= \int_U d\omega \wedge *\mu \\ &= \int_U (d(\omega \wedge *\mu) - (-1)^{r-1}\omega \wedge d * \mu) \\ &= 0 + (-1)^r \int_U \omega \wedge * *^{-1} d * \mu \\ &= (\omega, (-1)^r *^{-1} d * \mu) \\ &= (\omega, \delta\mu) \end{aligned}$$

が成り立つ． □

勾配・回転・発散

まず次に注意する．

補題 10.1. g を M の計量とする．このとき，同型 $\alpha_g\colon TM \xrightarrow{\sim} T^*M$ が $v, w \in T_pM$ について

$$\alpha_g(v)(w) = g(v, w)$$

と置くことにより定まる．α_g を g に関する v の**双対**と呼ぶ．

α_g は一般的な記号ではないが，以下では断り無く用いる．

以下では $\mathbb{R}^n$ には標準的な向きと標準的なリーマン計量が入っているとする．多くの場合には $n=2$ あるいは $n=3$ である．

定義 10.2. $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ について，

$$\operatorname{grad} f = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

と置いて f の**勾配ベクトル場**と呼ぶ．

補題 10.3. $\operatorname{grad} f = \alpha_g^{-1}(df)$ が成り立つ．

定義 10.4. $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ について，$X = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ と表して

$$\operatorname{div} X = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_k}$$

と置いて X の**発散**と呼ぶ．

補題 10.5. $\operatorname{div} X = *^{-1} d * \alpha_g(X) = * d * \alpha_g(X) = -\delta(\alpha_g(X))$ が成り立つ．

注 10.6. 一般のリーマン多様体においては grad, div を補題 10.3, 10.5 の式により定める．

定義 10.7. 1) $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ について $X = f_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + f_2 \dfrac{\partial}{\partial x_2}$ と表して

$$r(X) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$$

と定める（特に呼称はないように思われる）．

2) $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ について $X = f_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + f_2 \dfrac{\partial}{\partial x_2} + f_3 \dfrac{\partial}{\partial x_3}$ と表して

$$\operatorname{rot} X = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right)\frac{\partial}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right)\frac{\partial}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)\frac{\partial}{\partial x_3}$$

と定め，X の**回転**と呼ぶ．$\operatorname{rot} X$ は $\operatorname{curl} X$ で表すこともある．

補題 10.8. 1) $r(X) = * d\alpha_g(X) = *^{-1} d\alpha_g(X)$ が成り立つ．

2) $\operatorname{rot} X = \alpha_g^{-1} * d\alpha_g(X)$ が成り立つ．

証明. 2) を示す．$\alpha_g(X) = f_1 dx_1 + f_2 f x_2 + f_3 f x_3$ だから

$$d\alpha_g(X) = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2$$

が成り立つ．よって
$$* d\alpha_g(X) = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right) dx_2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) dx_3$$
が成り立つ．これに α_g^{-1} を施せば主張を得る． □

2次元あるいは3次元多様体の場合には r, rot を補題 10.8 の式により定めることができる．形式的には次の可換図式が得られる．

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C^\infty(\mathbb{R}^2) & \xrightarrow{\text{grad}} & \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2) & \xrightarrow{r} & C^\infty(\mathbb{R}^2) & \longrightarrow & 0 \\
\| & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_g} & & \downarrow{\scriptstyle *} & & \| \\
0 & \longrightarrow & \Omega^0(\mathbb{R}^2) & \xrightarrow[d]{} & \Omega^1(\mathbb{R}^2) & \xrightarrow[d]{} & \Omega^2(\mathbb{R}^2) & \xrightarrow[d]{} & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & C^\infty(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\text{grad}} & \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\text{rot}} & \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\text{div}} & C^\infty(\mathbb{R}^2) & \longrightarrow & 0 \\
\| & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_g} & & \downarrow{\scriptstyle *\alpha_g} & & \downarrow{\scriptstyle *} & & \| \\
0 & \longrightarrow & \Omega^0(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow[d]{} & \Omega^1(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow[d]{} & \Omega^2(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow[d]{} & \Omega^3(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow[d]{} & 0
\end{array}$$

縦の写像は全て同型であって，また，下の列は Poincaré の補題により完全であるから，上の列も完全である．一般のリーマン多様体の場合には下の列の完全性が必ずしも成り立たないので，上の列の完全性も同様に必ずしも成り立たない．

定義 10.9. $\Delta = d\delta + \delta d \colon \Omega^r(U) \to \Omega^{n-r}(U)$ を**ラプラス作用素**，**ラプラシアン**と呼ぶ．また，$\omega \in \Omega^r(U)$ が $\Delta\omega = 0$ を満たすとき，ω を**調和 r-形式**と呼ぶ．調和 0-形式を特に**調和函数**と呼ぶ．

補題 10.10. ω が調和形式である，即ち $\Delta\omega = 0$ が成り立つことと $d\omega = 0$ かつ $\delta\omega = 0$ が成り立つことは同値である．

<u>証明</u>.
$$(\Delta\omega, \omega) = (d\delta\omega + \delta d\omega, \omega) = (d\omega, d\omega) + (\delta\omega, \delta\omega)$$
が成り立つ．主張はこれから従う（g が正値であることを用いていることに注意せよ）． □

補題 10.11. $\Delta * = * \Delta$ が成り立つ．特に，ω が調和 r-形式であれば，$*\omega$ は調和 $(n-r)$-形式である．

証明. $\Omega^r(U)$ 上で

$$\begin{aligned}
\Delta * &= d\delta * + \delta d * \\
&= d \circ ((-1)^{n-r} *^{-1} d*) * + ((-1)^{n-r+1} *^{-1} d*) d* \\
&= (-1)^{n-r}(-1)^{r(n-r)} d *^{-1} d + (-1)^{n-r+1} *^{-1} d * d* \\
&= (-1)^{(r+1)(n-r)} d *^{-1} d + (-1)^{n-r+1} *^{-1} d * d* \\
&= (-1)^{(r+1)(n-r)}(-1)^{(r+1)(n-r-1)} d * d + (-1)^{n-r+1}(-1)^{r(n-r)} * d * d* \\
&= (-1)^{r+1} d * d + (-1)^{n-r+1}(-1)^{r(n-r)} * d * d*, \\
* \Delta &= * d\delta + * \delta d \\
&= * d \circ ((-1)^{r} *^{-1} d*) + *(-1)^{r+1} *^{-1} d * d \\
&= (-1)^{r} * d *^{-1} d * + (-1)^{r+1} d * d \\
&= (-1)^{r}(-1)^{(r-1)(n-r+1)} * d * d * + (-1)^{r+1} d * d
\end{aligned}$$

が成り立つ．一方，$(-1)^r(-1)^{(r-1)(n-r+1)} = (-1)^{n-r+1}(-1)^{r(n-r+1)+r} = (-1)^{n-r+1}(-1)^{r(n-r)}$ が成り立つので $\Delta * = * \Delta$ が成り立つ． □

例 10.12. $\mathbb{R}^n$ に標準的なリーマン計量（g で表す）と標準的な向きを入れる．また，$U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とする．

1) $f \in \Omega^0(U)$ とする．$df = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ が成り立つから，

$$\begin{aligned}
\delta df &= (-1)^{n+n+1} * d * df \\
&= - * d \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n \right), \\
&= - * \left(\sum_{i,j} (-1)^{i+1} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^j \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n \right) \\
&= - * \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \right) \\
&= - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^i}
\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし $\widehat{dx^i}$ は dx^i を取り除くことを意味する．一方，$\delta f \in \Omega^n(U)$ なので $d\delta f \in \Omega^{n+1}(U) = \{0\}$ が成り立つ．従って $d\delta f = 0$ が成り立つ．よって $\Delta =$

$-\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^i}$ が成り立つ[†1]．また，$\operatorname{grad} f = \nabla f = \dfrac{\partial f}{\partial x^1}\dfrac{\partial}{\partial x^1} + \dfrac{\partial f}{\partial x^2}\dfrac{\partial}{\partial x^2} + \dfrac{\partial f}{\partial x^3}\dfrac{\partial}{\partial x^3}$ であるから，$\operatorname{div}\operatorname{grad} f = \nabla\cdot(\nabla f) = -\Delta f$ が成り立つ（問 10.13 も参照のこと）．この意味で $\nabla\cdot\nabla = -\Delta$ が成り立つ．

2) $n=3$ とする．このとき $\operatorname{rot} X = \alpha_g^{-1} * d\alpha_g(X)$ が成り立つのであった．従って

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} X) = (\alpha_g^{-1} * d \circ \alpha_g) \circ (\alpha_g^{-1} * d \circ \alpha_g) X = \alpha_g^{-1} * d * d\alpha_g(X)$$

が成り立つ．ところで，$\Omega^1(U)$ 上では $*d*d = (-1)^{3\cdot 2+3+1} * d * d = \delta d$ が成り立つので

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} X) = \alpha_g^{-1}\delta d\alpha_g(X) = \alpha_g^{-1}(\Delta\alpha_g(X) - d\delta\alpha_g(X))$$

が成り立つ．一方，$X = f_1\dfrac{\partial}{\partial x_1} + f_2\dfrac{\partial}{\partial x_2} + f_3\dfrac{\partial}{\partial x_3}$ とすると

$$\begin{aligned}
d\delta\alpha_g(X) &= d\delta\left(f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3\right) \\
&= -d*d*(f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3) \\
&= -d*d(f_1 dx_2\wedge dx_3 + f_2 dx_3 \wedge dx_1 + f_3 dx_1\wedge dx_2) \\
&= -d*((\operatorname{div} X)dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3) \\
&= -d(\operatorname{div} X)
\end{aligned}$$

が成り立つから，補題 10.3 により $\alpha_g^{-1} d\delta\alpha_g(X) = -\operatorname{grad}(\operatorname{div} X)$ が成り立つ．伝統的なベクトル解析の記法では $-\alpha_g^{-1}\Delta\alpha_g(X)$ を $\nabla^2 X$ あるいは $-\Delta X$ で表す[†2]（符号はここでの定義に合わせている）．これは 1) を踏まえて

$$\nabla^2 X = -\Delta X = -(\Delta f_1)\frac{\partial}{\partial x_1} - (\Delta f_2)\frac{\partial}{\partial x_2} - (\Delta f_3)\frac{\partial}{\partial x_3}$$

としたものである．すると，

$$\begin{aligned}
&\Delta\eta_X \\
&= (d\delta + \delta d)(f^1 dx^1 + f^2 dx^2 + f^3 dx^3) \\
&= -d*d*(f^1 dx^1 + f^2 dx^2 + f^3 dx^3) + *d*d(f^1 dx^1 + f^2 dx^2 + f^3 dx^3) \\
&= -d*d(f^1 dx^2\wedge dx^3 + f^2 dx^3\wedge dx^1 + f^3 dx^1 \wedge dx^2) \\
&\quad + *d*\left(\left(\frac{\partial f^3}{\partial x^2} - \frac{\partial f^2}{\partial x^3}\right)dx^2\wedge dx^3 + \left(\frac{\partial f^1}{\partial x^3} - \frac{\partial f^3}{\partial x^1}\right)dx^3\wedge dx^1 + \left(\frac{\partial f^2}{\partial x^1} - \frac{\partial f^1}{\partial x^2}\right)dx^1\wedge dx^2\right)
\end{aligned}$$

[†1]通常の（函数に関する）ラプラシアンと符号が異なるように見えるが，こちらをラプラシアンとすることも多い．

[†2]古典的あるいは通用している記法に通暁することは大切なことであるが，そのような記法が理論的に簡潔であるとは限らない．余計な混乱が無いような理解をすることが大切である．適切な方法は各々で異なる．古典的な方法が合っている場合もあるし，そうでない場合もある．

$$
\begin{aligned}
&= -d(\operatorname{div} X) + *d\left(\left(\frac{\partial f^3}{\partial x^2} - \frac{\partial f^2}{\partial x^3}\right)dx^1 + \left(\frac{\partial f^1}{\partial x^3} - \frac{\partial f^3}{\partial x^1}\right)dx^2 + \left(\frac{\partial f^2}{\partial x^1} - \frac{\partial f^1}{\partial x^2}\right)dx^3\right)\\
&= -d(\operatorname{div} X) + *d\left(\left(\frac{\partial f^3}{\partial x^2} - \frac{\partial f^2}{\partial x^3}\right)dx^1 + \left(\frac{\partial f^1}{\partial x^3} - \frac{\partial f^3}{\partial x^1}\right)dx^2 + \left(\frac{\partial f^2}{\partial x^1} - \frac{\partial f^1}{\partial x^2}\right)dx^3\right)\\
&= -d(\operatorname{div} X)\\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x^1}(\operatorname{div} X)dx^1 + \Delta f^1 dx^1\\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial x^2}(\operatorname{div} X)dx^2 + \Delta f^2 dx^2\\
&\qquad\quad + \frac{\partial}{\partial x^3}(\operatorname{div} X)dx^3 + \Delta f^3 dx^3\\
&= \Delta f^1 dx^1 + \Delta f^2 dx^2 + \Delta f^3 dx^3\\
&= \eta_{\Delta X}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．よって

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} X) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} X) + \Delta X$$

が成り立つ．

微分形式との対応を踏まえると，grad の後には rot が，rot の後には div しか現れないのが自然であるが，Hodge star により $\Omega^2(U)$ と $\Omega^1(U)$ が同一視されるので例えば rot が続けて現れたり，grad の後に div が現れたりする．あるいは $\Omega^r(U)$ の元についての外微分を d_r で表すことにすると，d_r の後には d_{r+1} が現れるのが自然であるが，$\omega \in \Omega^1(U)$ について $*d_1\omega \in \Omega^1(U)$ であるから，$d_1 * d_1\omega$ を考えることができる，としても同様である．

問 10.13. $\operatorname{div}\operatorname{grad} f = -\Delta f$ が成り立つことを直接的なテンソル計算をせずに（$\operatorname{grad} f$ を具体的に書き下して計算することなしに）示せ．

ラプラシアンは次の意味でも自然である．$n = 2$ とする．$\mathbb{R}^2$ の座標を (x, y) とすると $\Delta = -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ が成り立つ．ここで (x, y) と $z = x + \sqrt{-1}y$ を同一視すると

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{4}\Delta$$

が成り立つ．

定理 10.14. $U \subset \mathbb{C}$ を開集合とし，$f\colon U \to \mathbb{C}$ を正則とする．このとき，$f = u + \sqrt{-1}v$ と実函数 u, v を用いて表すと $\Delta u = \Delta v = 0$ が成り立つ．即ち，u, v は調和函数である．

u と v は独立ではなく，しばしば共軛と呼ばれる関係にある．これに関しては（複素）函数論の教科書にあたること．また，定理の証明は演習問題とする．

全微分方程式と微分形式

ここでは二年生向け講義「常微分方程式」の内容については既知として話を進める．それでは困るという場合には付録などを参照のこと．

$\mathbb{R}^2$ 上の全微分方程式

$$fdx + gdy = 0 \tag{11.1}$$

を考える．また，ここでは話を簡単にするために，f, g は同時には 0 にならないとする．方程式 (11.1) の解は，大雑把には y に関する常微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{f}{g}$ の解と一致するのであった．全微分方程式 (11.1) は，$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が存在して

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = f, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = g$$

が成り立つ時**完全形**と呼ばれるのであった．$\omega = fdx + gdy$ と置けば，この条件は $d\varphi = \omega$ と同値である．また，f, g が同時には 0 にならないという条件は $\mathbb{R}^2$ 上至る所 $\omega_x \neq 0$ が成り立つこと同値である．さて，(11.1) が完全形であれば，$S_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(x, y) = c\}$ と置くと S_c は曲線である．実際，$D\varphi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix}$ は 0 にならないから，$\varphi(\mathbb{R}^2)$ の任意の点は正則値である．$\gamma\colon I = (-\epsilon, \epsilon) \to S_c$ とすると，$\forall t \in I,\ \varphi \circ \gamma(t) = c$ が成り立つから，

$$\omega_{\gamma(t)}(D\gamma(t)) = d\varphi_{\gamma(t)}(D\gamma(t)) = d(\varphi \circ \gamma)(t) = 0$$

が成り立つ．よって S_c は曲線としては (11.1) の解である．

一般には (11.1) が完全形でなくとも，**積分因子** $\mu\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ について $\mu\omega = d\varphi$ が成り立てば類似の議論が可能であった．積分因子を具体的に求めることは一般には難しいが，次のことは容易に分かる．即ち，

$$0 = d(d\varphi) = d(\mu\omega) = d\mu \wedge \omega + \mu d\omega$$

が成り立つ．以下では μ は 0 を取らないとする．$\mu = e^\nu$ とすると $d\mu = e^\nu d\nu$ が成り立つ．すると $e^\nu d\nu \wedge \omega + e^\nu d\omega = 0$ だから $d\nu \wedge \omega + d\omega = 0$ が成り立つ．やや乱暴であるが，雰囲気としては $d\nu = -\dfrac{d\omega}{\omega}$ が成り立つ．もし右辺がまともに定義できるのであれば，ν は $-\dfrac{d\omega}{\omega}$ を積分して得られる．もう少し正確な話をする．

$$\omega \wedge d\omega = \omega \wedge \frac{1}{\mu}(-d\mu \wedge \omega) = 0$$

が成り立つ．条件 $\omega \wedge d\omega = 0$ は ω に関する**可積分条件**（の $\mathbb{R}^2$ の場合）である．ω が 0 にならない範囲では，可積分条件がみたされれば積分因子が見つかり，全微分方程式 $\omega = 0$ が（必要であれば）積分因子を用いて解ける．これは，Frobenius の定理の特別な場合である．

定義 11.2. 1) TM の部分束 F が**対合的**（involutive）であるとは，U を開集合とすると，$s_1, s_2 \in \mathit{\Gamma}_U(F)$ について $[s_1, s_2] \in \mathit{\Gamma}_U(F)$ が成り立つことを言う．

2) TM の部分束 F が（完全）**可積分**であるとは，$p \in M$ について M の部分多様体 N が存在して $F_p = T_pN$ が成り立つことを言う．

補題 11.3. $F \subset TM$ を部分束とし，局所的に $F = \ker(\omega_1, \dots, \omega_q) = \{v \in TM \mid \omega_1(v) = \dots = \omega_q(v) = 0\}$，ただし $\omega_1, \dots, \omega_q$ は $\mathbb{R}$ 上線型独立，と表す．F が対合的であることと，このような $\omega_1, \dots, \omega_q$ について，1 形式の族 $\{\theta_{ij}\}_{1 \le i,j \le q}$ が存在して

$$d\omega_i + \sum_{j=1}^{q} \theta_{ij} \wedge \omega_j = 0 \tag{11.4}$$

が成り立つことは同値である．式 (11.4) を $\{\omega_1, \dots, \omega_q\}$ あるいは $\ker(\omega_1, \dots, \omega_q)$ に関する**完全可積分条件**と呼ぶ．単に**可積分条件**と呼ぶこともある．

<u>証明</u>. $\omega_1, \dots, \omega_q$ を拡大して $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_q, \omega_{q+1}, \dots, \omega_n)$ は T^*M の局所枠だとする．また，$(e_1, \dots, e_n)$ を ω に双対な TM の局所枠とする．$(e_{q+1}, \dots, e_n)$ は F の局所枠である．まず F が対合的だとする．すると，$q+1 \le j, k \le n$ について

$$d\omega_i(e_j, e_k) = e_j(\omega_i(e_k)) - e_k(\omega_i(e_j)) - \omega_i([e_j, e_k]) = 0$$

が成り立つ．一方，

$$d\omega_i = \sum_{j<k} f_{i;jk}\omega_j \wedge \omega_k$$

と表すと

$$d\omega_i(e_j, e_k) = f_{i;jk}$$

が成り立つ．従って，$j, k \ge q+1$ ならば $f_{jk} = 0$ が成り立つ．そこで $1 \le i < j \le q$ であるとき

$$\theta_{ij} = -\sum_{l=1}^{q} f_{i;lj}\omega_l + \sum_{l=q+1}^{n} f_{i;jl}\omega_l$$

と置けば (11.4) が成り立つ．逆に (11.4) が成り立つとする．すると，$1 \le i \le q,\ q+1 \le j, k \le n$ について

$$\omega_i([e_j, e_k]) = -d\omega_i(e_j, e_k) + e_j(\omega_i(e_k)) - e_k(\omega_i(e_j)) = 0$$

が成り立つから，F は対合的である． $\square$

定理 11.5 (Frobeinus の定理)．$F \subset M$ が対合的であることと可積分であることは同値である．

補題 11.6. 1) $\omega \in \Omega^1(M)$ は 0 を取らないとする．このとき以下は同値である．

a) ω は可積分である

b) $\theta \in \Omega^1(M)$ が存在して $d\omega + \theta \wedge \omega = 0$ が成り立つ．

c) $\omega \wedge d\omega = 0$ が成り立つ．

2) $(\omega_1, \ldots, \omega_q)$ は M 上で線型独立であって，可積分とする．このとき，$\omega = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_q$ と置くと，ある $\theta \in \Omega^1(M)$ が存在して $d\omega + \theta \wedge \omega = 0$ が成り立つ．

証明. 1) の証明．a) が成り立つ，即ち，ω は可積分とする．すると $p \in M$ について p を含む近傍 U_p と $\theta_p \in \Omega^1(U_p)$ が存在して U_p 上で $d\omega + \theta_p \wedge \omega = 0$ が成り立つ．そこで $\{U_i\}$ を $\{U_p\}$ の細分であるような局所有限被覆とし，$\{\rho_i\}$ を従属する 1 の分割とする．$\theta = \sum_i \rho_i \theta_i$ とすると

$$
\begin{aligned}
d\omega &= d\left(\sum_i \rho_i \omega\right) = d\left(\sum_i -\theta_i \wedge \omega\right) = -\left(\sum_i \theta_i\right) \wedge \omega \\
&= -\theta \wedge \omega
\end{aligned}
$$

が成り立つ．従って b) が成り立つ．b) が成り立つならば $\omega \wedge d\omega = -\omega \wedge \theta \wedge \omega = 0$ が成り立つ．c) が成り立つとする．$\omega_1 = \omega$ とし，$(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ を局所的な T^*M の自明化とすると $d\omega = \sum_{i<j} f_{ij} \omega_i \wedge \omega_j$ が成り立つ．$\omega \wedge d\omega = 0$ だから，$1 < i < j$ ならば $f_{ij} = 0$ が成り立つ．局所的に $\theta = \sum_{j=2}^{n} f_{1j} \omega_j$ と置けば $d\omega + \theta \wedge \omega = 0$ が成り立つから，ω は可積分である．

2) の証明．$d\omega_i + \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} \wedge \omega_j = 0$ として $\theta = \sum_i \theta_{ii}$ とすれば良い．θ が大域的に取れることは 1) と同様に示せる． $\square$

付録：全微分方程式とベクトル場・1-形式

内容は二年生向け講義「常微分方程式」あるいは三年生向け講義「幾何学 I」に属する内容である．

ベクトル場と積分曲線

正規形の常微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{12.1}$$

を形式的に

$$dy - f dx = 0 \tag{12.2}$$

と書き直す．この形の方程式は**全微分方程式**と呼ばれるもの（後で定義する）の例である．ここではこれらの方程式がある意味で同一であることについて述べる．

まず，式 (12.2) の左辺はいかにも 1-形式にみえるので

$$\omega = dy - f dx$$

と置く．さて，$\varphi = \varphi(x)$ を方程式 (12.1) の解とする（定義域は取り敢えず $\mathbb{R}$ としておく）．φ のグラフ $\Gamma = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ の $p = (x, \varphi(x))$ における接ベクトルの一つ

$$v_p = \frac{\partial}{\partial x}_p + D\varphi(x) \frac{\partial}{\partial y}_p$$

（**速度ベクトル**とここでは呼ぶ）について，$\dfrac{d\varphi}{dx}(x) - f(x, \varphi(x)) = 0$ が成り立つ．このとき，

$$\begin{aligned}
\omega_p(v_p) &= (dy_p - f(p) dx_p) \left(\frac{\partial}{\partial x}_p + D\varphi(x) \frac{\partial}{\partial y}_p \right) \\
&= D\varphi(x) - f(x, \varphi(x)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

が成り立つ．また，$l\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を $l(x) = (x, \varphi(x))$ により定めれば，$l(x) \in \Gamma$ における l の接ベクトルは

$$Dl(x) = \frac{\partial}{\partial x}_p + \frac{d\varphi}{dx}(x) \frac{\partial}{\partial y}_p$$

により与えられる．ここで，$\mathbb{R}$ の座標 x は $\mathbb{R}^2$ の座標 (x, y) の第一成分と同一視している．同一視しないのであれば，例えば $\mathbb{R}$ の座標を t として，$l(t) = (t, \varphi(t))$ とすると，t あるいは $l(t)$ における接ベクトルは

$$Dl(t) = \frac{\partial}{\partial x}_{l(t)} + \frac{d\varphi}{dt}(t) \frac{\partial}{\partial y}_{l(t)}$$

で与えられる，ということになる．一般に，$l\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ が微分可能ならば $l(t) = (l_1(t), l_2(t))$ と置けば

$$Dl(t) = \frac{dl_1}{dt}(t) \frac{\partial}{\partial x}_{l(t)} + \frac{dl_2}{dt}(t) \frac{\partial}{\partial y}_{l(t)}$$

が成り立つ．$x = l_1(t) = t$ とすれば，上の式が復元される．

ここまでの話は次のようにまとめることができる（ここでは φ の定義域にも少し気を遣っている）．

命題 12.3. 常微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f \tag{12.4}$$

において f は (x, y) に関して C^∞ 級であるとする．また，$\omega = dy - f dx \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ とする．φ を微分方程式 (12.4) の $y_0 = y(x_0)$ を充たす解とし，φ は $|x - x_0| < \epsilon$ において定義されているとする．このとき，φ のグラフ

$$\left\{(x, \varphi(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| < \epsilon\right\}$$

上の点 p における接ベクトル $v_p = a\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p + b\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p$ を任意に取ると，$\omega_p(v_p) = 0$ が成り立つ．逆に，$v \in T_p\mathbb{R}^2$ について $\omega_p(v) = 0$ が成り立てば，v は $\frac{dy}{dx} = f$ の p を通る解のグラフの p における接ベクトルである．

<u>証明</u>. v_p が解のグラフの接ベクトルであることは，ある $\lambda \in \mathbb{R}$ について

$$v_p = \lambda\left(\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p + \frac{d\varphi}{dx}(x)\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p\right)$$

が成り立つことと同値であることから命題が成り立つ． □

命題 12.3 が示すように条件 $\omega = 0$ あるいは $dy - f dx = 0$ から定まるのは解に対応する速度ベクトルそのものというよりも，解のグラフの接線（接ベクトル全体）である．もし解のグラフの接線から解が復元できれば，$\frac{dy}{dx} = f$ を解けたことになるのでこれが可能かどうか調べてみる．

解のグラフの接線は，接線に含まれているような 0 でないベクトルを一つ定めれば定まる．従って，解のグラフの接線が与えられるためには，$\mathbb{R}^2$ の各点 p において

$$a(p)\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p + b(p)\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p$$

であって，適当な $\lambda(p) \neq 0$ が存在して

$$a(p)\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p + b(p)\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p = \lambda(p)\left(\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p + f(p)\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p\right)$$

が成り立つようなものが一斉に定まれば良い．これは $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 X であって，

$$X(p) = a(p)\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p + b(p)\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p$$

と表したとき，a が $\mathbb{R}^2$ 上で 0 を取らない（0 にならない）ものが与えられるということである（ここではまだ X が C^r 級であるかどうかは問わない）．

例 12.5. f を C^∞ 級とすると，微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = f$ からは次のように自然に C^∞ 級のベクトル場が定まる．即ち，

$$X(p) = \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p + f(p)\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p$$

と定める．f は C^∞ 級なので X は C^∞ 級である．$\varphi(x)$ が $\dfrac{dy}{dx} = f$ の解であるならば，$l(t) = (t, \varphi(t))$ とすれば $Dl(t) = \left.\dfrac{\partial}{\partial x}\right|_{l(t)} + \dfrac{d\varphi}{dt}(t)\left.\dfrac{\partial}{\partial y}\right|_{l(t)} = \left.\dfrac{\partial}{\partial x}\right|_{l(t)} + f(t)\left.\dfrac{\partial}{\partial y}\right|_{l(t)} = X(l(t))$ が成り立つ．

このことを踏まえて次のように定める．

定義 12.6. $l\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^2$ が C^r 級の**曲線**であるとは，l が $\mathbb{R}^2$-値函数として C^r 級であることを言う．

定義 12.7. X を C^∞ 級のベクトル場とする．C^∞ 級の曲線 ℓ が X の**積分曲線**であるとは，$l(t) = (l_1(t), l_2(t))$ と座標を用いて表すと

$$X(l(t)) = Dl(t) = \frac{dl_1}{dt}(t)\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{l(t)} + \frac{dl_2}{dt}(t)\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{l(t)}$$

が任意の $t \in (a, b)$ について成り立つことを言う．

例 12.8. φ を $\dfrac{dy}{dx} = f$ の解とする．

$$l(t) = (t, \varphi(t))$$

と定めれば l は例 12.5 で考えたベクトル場 $X = \dfrac{\partial}{\partial x} + f\dfrac{\partial}{\partial y}$ の積分曲線である．

一般に，$X = a\dfrac{\partial}{\partial x} + b\dfrac{\partial}{\partial y}$ について，$l = (l_1, l_2)$ が積分曲線であることは

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dl_1}{dt} \\ \dfrac{dl_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(l_1, l_2) \\ b(l_1, l_2) \end{pmatrix} \tag{12.9}$$

が成り立つことと同値である．方程式 (12.9) は（例えば「常微分方程式」で扱った）正規形常微分方程式（但し，ベクトル値函数に関する方程式である）であって，しかも a, b は t, l_1, l_2 の函数として C^∞ 級である（実際には t には依存していない）．従って (12.9) は任意の初期条件 $l(t_0) = p_0 \in \mathbb{R}^2$ に対して $|t - t_0|$ が十分小さい範囲で一意的に解を持つ．従って次が成り立つ．

定理 12.10. X を $\mathbb{R}^2$ 上の C^∞ 級のベクトル場とする．任意の $t_0 \in \mathbb{R}$，$p \in \mathbb{R}^2$ について，ある $\epsilon > 0$ が存在して $|t - t_0| < \epsilon$ で定義された X の積分曲線 l であって $l(t_0) = p$ を充たすものが存在する．l が (a, b) 上定義された積分曲線であって $l(t_0) = p$ を充たし，また，l' が (a', b') 上定義された積分曲線であって $l(t_0) = p$ を満たすのであれば $(a, b) \cap (a', b')$ 上で $l = l'$ が成り立つ．

上の定義を用いれば，全微分方程式 $\omega = 0$ を解くために，解のグラフの接線を考える代わりにベクトル場

$$X = \lambda \frac{\partial}{\partial x} + \lambda f \frac{\partial}{\partial y}$$

とその積分曲線を考える，ということになる．ここでは λ は $p = (x, y)$ の函数として C^∞ 級であるとするのが自然である．また，接線が定まる必要があるので λ は 0 にならないと仮定する．定理 12.10 により X の積分曲線は存在するので，それを $l = (l_1, l_2)$ とすると

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dl_1}{dt}(t) \\ \\ \dfrac{dl_2}{dt}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(l(t)) \\ \\ \lambda(l(t)) f(\lambda(t)) \end{pmatrix}$$

が成り立つ．λ は 0 にならないと仮定しているので，$\lambda > 0$ とすると（$\lambda < 0$ でも同様である）l_1 は狭義単調増加函数であって，逆函数 $t = \psi(x)$ が存在する．そこで

$$\widetilde{l}(x) = l(\psi(x))$$

と定め，$\widetilde{l} = (\widetilde{l}_1, \widetilde{l}_2)$ と成分を用いてあらわすと，

$$(\widetilde{l}_1(x), \widetilde{l}_2(x)) = (l_1 \circ \psi(x), l_2 \circ \psi(x)) = (x, l_2 \circ \psi(x))$$

であって，

$$\begin{aligned}
\frac{d\widetilde{l}_1}{dx}(x) &= 1, \\
\frac{d\widetilde{l}_2}{dx}(x) &= \frac{dl_2}{dt}(\psi(x)) \frac{d\psi}{dx}(x) \\
&= \lambda(l(\psi(x))) f(l(\psi(x))) \frac{1}{\frac{dl_1}{dt}(\psi(x))} \\
&= f(\widetilde{l}(x))
\end{aligned}$$

が成り立つから，$\widetilde{l}$ は $\dfrac{\partial}{\partial x} + f \dfrac{\partial}{\partial y}$ の積分曲線であって，$\widetilde{l}_2(x)$ は $\dfrac{dy}{dx} = f$ の解である．従って，元の方程式 $\dfrac{dy}{dx} = f$ の解は $X = \lambda \dfrac{\partial}{\partial x} + \lambda f \dfrac{\partial}{\partial y}$ の形をしたベクトル場から積分曲線として復

元できる．より詳しく，積分曲線のパラメータ付けを $l = (x, l_2(x))$ となるように取り替えることができて，l_2 が解である．

1-形式と全微分方程式

前節の結果を踏まえれば $\omega = 0$，ただし $\omega = dy - fdx \in \Omega^1(U)$（$U$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合），を微分方程式と考えるのは不思議なことではない．少し一般化して，次のように定める．

定義 12.11. $U \subset \mathbb{R}^2$ を開集合とし，$\omega \in \Omega^1(U)$ とする[†3]．このとき条件

$$\omega = 0$$

を方程式と考えて，**全微分方程式**と呼ぶ．

1-形式と全微分とは次のように関係する．

話を簡単にするために $\mathbb{R}^2$ 上で考える（$U = \mathbb{R}^2$ とする）．$\omega = \zeta dx + \eta dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ とする．ここで，任意の $p \in \mathbb{R}^2$ について $\omega_p \neq 0$ が成り立つとする（この仮定は本質的である．$\omega_p = 0$ が成り立つような p は方程式の**特異点**となり，p の近傍での解の挙動は一般には複雑になる）．なお，方程式 $\dfrac{dy}{dx} = f$ から得られる $\omega = dy - fdx$ についてはこれは成り立つ．さて，X を $\omega(X) = 0$ をみたすベクトル場（ここでは C^∞ 級とする）とすれば，適当な函数 λ が存在して

$$\begin{aligned}X(x,y) &= \lambda(x,y)\eta(x,y)\frac{\partial}{\partial x}_{(x,y)} - \lambda(x,y)\zeta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}_{(x,y)} \\ &= \lambda(x,y)\left(\eta(x,y)\frac{\partial}{\partial x}_{(x,y)} - \zeta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}_{(x,y)}\right)\end{aligned}$$

が成り立つ．さらに話を単純にするために η は 0 を取らないとする[†4]．すると

$$X(x,y) = \lambda(x,y)\eta(x,y)\left(\frac{\partial}{\partial x}_{(x,y)} - \frac{\zeta(x,y)}{\eta(x,y)}\frac{\partial}{\partial y}_{(x,y)}\right)$$

が成り立つ．前節の最後に述べたように，$\lambda(x,y) \neq 0$ が成り立つ範囲では，適当に変数変換すると X の積分曲線は

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\zeta}{\eta}$$

の解のグラフと一致する．

函数 f の全微分とベクトル場の関係について少し復習しておく．

[†3] 全微分方程式を考えるだけなら例えば Lipschitz 連続で十分である．

[†4] この仮定は話を簡単にしているだけで，本質的ではない．

定義 12.12. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級の函数とする．

1) $v_p = a\dfrac{\partial}{\partial x}_p + b\dfrac{\partial}{\partial y}_p \in T_p\mathbb{R}^2$ とする．このとき，v_p による f の**微分** $v_p(f)$ を

$$v_p(f) = a\frac{\partial f}{\partial x}(p) + b\frac{\partial f}{\partial y}(p)$$

により定める．

2) $X = a\dfrac{\partial}{\partial x} + b\dfrac{\partial}{\partial y}$ を C^∞ 級のベクトル場とする（a, b は 1) と違って函数である）．このとき，X による f の**微分** $X(f) = Xf\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$\begin{aligned} Xf(p) &= X_p(f) \\ &= a(p)\frac{\partial f}{\partial x}(p) + b(p)\frac{\partial f}{\partial y}(p) \end{aligned}$$

により定める．

補題 12.13. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級の函数，$X = a\dfrac{\partial}{\partial x} + b\dfrac{\partial}{\partial y}$ を C^∞ 級のベクトル場とする．このとき

$$df(X) = X(f)$$

が成り立つ．

<u>証明</u>. $p \in \mathbb{R}^2$ について

$$\begin{aligned} df(X)(p) &= (df)_p(X_p) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p)dx_p + \frac{\partial f}{\partial y}(p)dy_p\right)\left(a(p)\frac{\partial}{\partial x}_p + b(p)\frac{\partial}{\partial y}_p\right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(p)a(p) + \frac{\partial f}{\partial y}(p)b(p) \end{aligned}$$

が成り立つ．一方，定義により

$$X(f)(p) = a(p)\frac{\partial f}{\partial x}(p) + b(p)\frac{\partial f}{\partial y}(p)$$

が成り立つので，これらは等しい． □

積分曲線とベクトル場による微分は次のように関係する．

命題 12.14. $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$，$v_p \in T_p\mathbb{R}^2$ とする．また，$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級の函数とする．

1) $l\colon (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^2$ を $l(0) = p$ を満たす曲線とすると

$$v_p(f) = \frac{d(f \circ l)}{dt}(0)$$

が成り立つ．

2) X をベクトル場，l を $l(0)=p$ を満たす X の積分曲線とすると

$$X(f)(p)=\frac{d(f\circ l)}{dt}(0)$$

が成り立つ．

<u>証明</u>. $v_p = a\dfrac{\partial}{\partial x}_p + b\dfrac{\partial}{\partial y}_p$ とする．定義により

$$v_p(f)=a\frac{\partial f}{\partial x}(p)+b\frac{\partial f}{\partial y}(p)$$

が成り立つ．一方，$l=(l_1,l_2)$ と座標を用いて表すと

$$\begin{aligned}\frac{d(f\circ l)}{dt}(0)&=\frac{\partial f}{\partial x}(l(0))\frac{dl_1}{dt}(0)+\frac{\partial f}{\partial y}(l(0))\frac{dl_2}{dt}(0)\\&=\frac{\partial f}{\partial x}(p)a+\frac{\partial f}{\partial y}(p)b\end{aligned}$$

が成り立つ．よって 1) が示せた．2) は 1) から直ちに従う． □

さて，今は $\omega=\zeta dx+\eta dy$, $X=a\dfrac{\partial}{\partial x}+b\dfrac{\partial}{\partial y}$ として，さらに，ζ と η は同時には零とならないとしている．また，$\omega(X)=0$ としているから

$$\omega(X)=\zeta a+\eta b=0$$

が成り立つ．ここで a,b も同時に零となることはないとする．例えば $p\in\mathbb{R}^2$ について $b(p)\neq 0$ であれば，p のある近傍 U で $b\neq 0$ が成り立つ．すると $\eta=-\dfrac{a}{b}\zeta$ が U 上で成り立つ．ζ と η は同時には零にならないとしているから，U 上では ζ は零にならない．一方，

$$X(f)=a\frac{\partial f}{\partial x}+b\frac{\partial f}{\partial y}$$

が成り立つ．ここで $X(f)=0$ が成り立つとすると，U 上で $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-\dfrac{a}{b}\dfrac{\partial f}{\partial x}$ が成り立つ．$\zeta\neq 0$ に注意して $\lambda=\dfrac{1}{\zeta}\dfrac{\partial f}{\partial x}$ とすると λ は C^∞ 級であって，

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{a}{b}\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{a}{b}\zeta\frac{1}{\zeta}\frac{\partial f}{\partial x}=\eta\lambda$$

が成り立つ．従って $df=\lambda\omega$ が U 上成り立つ．U 上 $a\neq 0$ でも同様の議論ができて，結局 $df=\lambda\omega$ が $\mathbb{R}^2$ 上成り立つことが分かる．逆に $df=\lambda\omega$ が成り立てば，$X(f)=df(X)=\lambda\omega(X)=0$ が成り立つ．よって，$X(f)=0$ が成り立つことと $df=\lambda\omega$ がある函数 λ について成り立つことは同値である．

ここで少し条件を強めて λ は零にならないとする．l を曲線とすると $f\circ l$ は実数値函数であるが，

$$
\begin{aligned}
\frac{d(f\circ l)}{dt}(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(l(t))\frac{dl_1}{dt}(t)+\frac{\partial f}{\partial y}(l(t))\frac{dl_2}{dt}(t)\\
&= \lambda(l(t))\left(\zeta(l(t))\frac{dl_1}{dt}(t)+\eta(l(t))\frac{dl_2}{dt}(t)\right)\\
&= \lambda(l(t))\,\omega_{l(t)}(Dl(t)),
\end{aligned}
\tag{12.15}
$$

ただし $Dl(t)=\frac{dl_1}{dt}(t)\frac{\partial}{\partial x}_{l(t)}+\frac{dl_2}{dt}(t)\frac{\partial}{\partial x}_{l(t)}$，が成り立つ．従って $f\circ l$ が定数であることと，l が $\omega(X)=0$ を充たすベクトル場の積分曲線であることは同値である．よって，$f(x,y)=c$（定数）を y について解いて $y=\widetilde{l}(x)$ の形に出来れば，$\widetilde{l}$ は $\frac{dy}{dx}=-\frac{p}{q}$ の解である．最後に，l が X の積分曲線ならば式 (12.15) の左辺は命題 12.14 により $X(f)$ に等しいことに注意しておく．

ベクトル場 X に函数をかけることには，パラメータの取替えにあたることがおおよそ対応していた．一方，ω の代わりに 0 にならない函数 Φ をかけて $\omega'=\Phi\omega$ を考える．すると，$\omega(X)=0$ と $\omega'(X)=0$ は同値であるから，$\omega'=0$ に対応する微分方程式は $\omega=0$ に対応する微分方程式と同値である．敢えて言えば，$\omega=pdx+qdy$ の時には必ず X として $X=-q\frac{\partial}{\partial x}+p\frac{\partial}{\partial y}$ を考えるとするならば $\omega=0$ と $\omega'=0$ は異なる微分方程式と考えられるが，それでもこれらの積分曲線はパラメータ付けを無視すれば同一である．このように考えたとしても，$\omega=df$ なる f を見つけてきて f を y について解いても，$\omega'=dF$ なる F を見つけてきて F を y について解いても得られる曲線（微分方程式の解のグラフ）は同一である．$\omega=df$ なる f は存在しないが $\Phi\omega=dF$ なる F,Φ は存在するということもあるので，少しだけ一般化して次のように定める．

定義 12.16. $\omega=pdx+qdy$ とする．$\omega=df$ なる C^∞ 級の函数 f が存在するとき，$\omega=0$ は**完全形**であるという．

注 12.17. 方程式 $\omega=0$ が完全形であることは ω が完全形式であることと同値である．

定義 12.18. $\omega=pdx+qdy$ とする．C^∞ 級の函数 Φ であって，$\Phi\omega=df$ なる C^∞ 級の函数 f が存在するようなものを ω の**積分因子**と呼ぶ．f は状況によって**第一積分**，**ポテンシャル**などと呼ばれる．

注 12.19. 積分因子や積分は一般には一意ではない．

例 12.20.

$$\omega = (\cos x - \sin x)dx + (\cos x)dy$$

とすると，これは閉形式でないから完全形式でもない．しかし

$$e^{x+y}\omega = e^{x+y}(\cos x - \sin x)dx + e^{x+y}(\cos x)dy$$

とすると

$$d(e^{x+y}(\cos x)) = e^{x+y}(\cos x - \sin x)dx + e^{x+y}(\cos x)dy$$

が成り立つから，$e^{x+y}\omega$ は完全形式である．別の言い方をすれば e^{x+y} は ω の積分因子であって，$e^{x+y}(\cos x)$ がポテンシャル（積分）となる．

例 12.21.

$$y' = Py + Q$$

に対応する全微分方程式

$$(Py + Q)dx - dy = 0$$

を考える．これが積分可能であるとすれば，ある函数 F が存在して

$$\frac{\partial F}{\partial x} = Py + Q,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = -1$$

が成り立つが，実際には少し一般化して，適当な函数 $\mu = \mu(x)$（積分因子）について

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \mu(Py + Q), \tag{12.22a}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\mu \tag{12.22b}$$

が成り立つかどうかを調べるのが良いのであった．このような μ について

$$\mu P = \frac{\partial F}{\partial x \partial y} = -\frac{d\mu}{dx}$$

が成り立つ．特に $\widetilde{P}$ を P の原始函数の一つとすれば

$$\mu(x) = Ce^{-\widetilde{P}(x)},\ C \in \mathbb{R}$$

が成り立つ．μ は一つ見つかれば充分であるから $C = 1$ とし，

$$\mu(x) = e^{-\widetilde{P}(x)}$$

とする．

これを踏まえると，F は例えば次のように考えれば見つけることができる．まず，(12.22b) から

$$F(x,y) = -\mu(x)y + \varphi(x)$$

と書けるから，(12.22a) と併せれば

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= -\frac{d\mu}{dx}(x)y + \frac{d\varphi}{dx}(x)\\ &= \mu(x)P(x)y + \mu(x)Q(x)\end{aligned}$$

が成り立つ．従って

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dx} &= \mu(Py+Q) + \frac{d\mu}{dx}y\\ &= \mu(Py+Q) - P\mu y\\ &= \mu Q\\ &= e^{-\widetilde{P}}Q\end{aligned}$$

が成り立つ．そこで x の函数 $e^{-\widetilde{P}}Q$ の原始函数の一つを $\widetilde{Q} = \widetilde{Q}(x)$ とすると

$$F(x,y) = -e^{-\widetilde{P}(x)}y + \widetilde{Q}(x)$$

となり，このとき確かに

$$\begin{aligned}dF &= Pe^{-\widetilde{P}}ydx - e^{-\widetilde{P}}dy + e^{-\widetilde{P}}Qdx\\ &= e^{-\widetilde{P}}\left((Py+Q)dx - dy\right)\\ &= \mu\left((Py+Q)dx - dy\right)\end{aligned}$$

が成り立つ．

$$F(x,y) = C \quad （定数）$$

とすると，

$$-e^{-\widetilde{P}(x)}y + \widetilde{Q}(x) = C \Leftrightarrow y = e^{\widetilde{P}}(\widetilde{Q}(x) - C)$$

が成り立つ．

（以上）