2018 年度幾何学 III 演習問題 6 v1

'18/11/6（火）

改変履歴．'18/11/12 :（v1）初版作成．概ね 11/6 の講義の分までの内容である．

テンソル場に関する演算

問 6.1. $U \subset M$ を開集合とする．また，$\omega_1, \ldots, \omega_p \in \Omega^1(U)$ とする．このとき，

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} (\operatorname{sgn} \sigma) \omega_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{\sigma(p)}$$

が成り立つことを示せ．

※ Kobayashi に従うと係数が変わる．

問 6.2. $U \subset M$ を開集合とする．$\sigma \in \Gamma_U(S^r(T^*U))$ を r 次の対称テンソル場，$\omega \in \Gamma_U(A^r(T^*U))$ を r 次の交代テンソル場（r-形式）とする．また，$X \in \Gamma_U(S^r(TU))$ を $(r,0)$-対称テンソル場，$Y \in \Gamma_U(A^r(TU))$ を r 次の $(r,0)$-交代テンソル場とする．

1) $\sigma(Y) = 0$ および $\omega(X) = 0$ が成り立つことを示せ．

2) U は座標近傍だとし，局所的に

$$\sigma = \sum_{i_1 \leq \cdots \leq i_r} f_{i_1,\ldots,i_r} dx_{i_1} \odot \cdots \odot dx_{i_r},$$
$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_r} g_{i_1,\ldots,i_r} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r}$$

と表す．また，

$$X = \sum_{i_1 \leq \cdots \leq i_r} \alpha_{i_1,\ldots,i_r} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \odot \cdots \odot \frac{\partial}{\partial x_{i_r}},$$
$$Y = \sum_{i_1 < \cdots < i_r} \beta_{i_1,\ldots,i_r} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_r}}$$

と表す．

$$\sigma(X) = \frac{1}{r!} \sum_{i_1 \leq \cdots \leq i_r} f_{i_1,\ldots,i_r} \alpha_{i_1,\ldots,i_r},$$
$$\omega(Y) = r! \sum_{i_1 \leq \cdots \leq i_r} g_{i_1,\ldots,i_r} \beta_{i_1,\ldots,i_r} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}$$

が成り立つことを示せ．

※ $\omega(Y)$ に関しては Kobayashi に従うと係数が変わる．

ここではテンソル場ωの，ベクトル場Xに関するLie微分を$L_X\omega$で表す．

問 6.3. ωを$(0,r)$-テンソル場とする．

1) $L_X\omega$はU上の$(0,r)$-テンソル場であることを示せ．
2) ωを固定すると，$L_X\omega$はXに関して線型であることを示せ．また，

$$L_{fX}\omega(X_1,\ldots,X_r) = fL_X\omega(X_1,\ldots,X_r) + \sum_{k=1}^{r} X_k(f)\omega(X_1,\ldots,\overset{k}{\smile}{X},\ldots,X_r)$$

が成り立つことを示せ．

問 6.4. Xを固定するとL_Xは線型であることを示せ．また，

$$L_X(\omega\otimes\mu) = (L_X\omega)\otimes\mu + \omega\otimes(L_X\mu)$$

が成り立つことを示せ．特に，対称形式，交代形式に関して

$$L_X(\omega\odot\mu) = (L_X\omega)\odot\mu + \omega\odot(L_X\mu),$$
$$L_X(\omega\wedge\mu) = (L_X\omega)\wedge\mu + \omega\wedge(L_X\mu)$$

がそれぞれ成り立つことを示せ．

ヒント：後半は前半を対称化，交代化すれば示せる．

問 6.5. 補題 2.4.22 に類似して，対称形式と対称積に関して

$$\iota_v(\omega\odot\mu) = \frac{1}{r+s}(r(\iota_v\omega)\odot\mu + s\omega\odot(\iota_v\mu))$$

が成り立つことを示せ．

問 6.6. $L_{[X,Y]} = L_X\circ L_Y - L_Y\circ L_X$が成り立つことを示せ．

問 6.7. $d\omega(X_0,\ldots,X_r) = \displaystyle\sum_{k=0}^{r}(-1)^k L_{X_k}\omega(X_0,\ldots,\widehat{X_k},\ldots,X_r)$が成り立つことを示せ．

（以上）