2018 年度幾何学 III 演習問題 4 v1

’18/10/30（火）

改変履歴．’18/10/31：（v1）初版作成．概ね 10/30 の講義の分までの内容である．

テンソル積など（続き）

問 4.1. ω, μ, ν をそれぞれ U 上の対称形式とする．このとき，

$$\omega \odot \mu = \mu \odot \omega,$$
$$(\omega \odot \mu) \odot \nu = \omega \odot (\mu \odot \nu)$$

がそれぞれ成り立つことを示せ．

問 4.2. $\dim M = n$ とする．

1) $\operatorname{rank} \bigwedge^n T^*M = 1$ が成り立つことを示せ．
2) $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ を M の座標近傍系とする．$\varphi_\alpha(U_\alpha)$ の座標を $x_{\alpha,1}, \dots, x_{\alpha,n}$ とすると，$dx_{\alpha,1} \wedge \cdots \wedge dx_{\alpha,n}$ は U_α 上の $\bigwedge^n T^*M$ の自明化であって，U_α から U_β への変換函数は $\det \rho_{\beta\alpha}^{-1}$ で与えられることを示せ．
3) M を連結とする．M が向き付け可能であることと，$\bigwedge^n T^*M$ が自明であることは同値であることを示せ．また，この条件は $\bigwedge^n TM$ が自明であることと同値であることを示せ．

計量など

問 4.3. g を M 上の計量とする．M が連結ならば $\operatorname{sgn} g_p$ は $p \in M$ によらないことを示せ．
ヒント：シルベスターの慣性律を用いよ．

問 4.4. $f \colon M \to N$ とし，g を N 上の計量とする．

1) f^*g が M 上の計量であるならば $\dim M \leq \dim N$ が成り立つことを示せ．
2) $\dim M \leq \dim N$ であっても f^*g は計量とは限らないことを示せ．
3) M, N を連結とする．f が微分同相ならば $\operatorname{sgn} f^*g = \operatorname{sgn} g$ が成り立つことを示せ．

問 4.5. 計量により定まる体積形式は $\bigwedge^n T^*M$ の大域自明化であることを示せ．また，M 上にはリーマン計量が常に存在することを用いて，M が向き付け可能であることと，$\bigwedge^n T^*M$ が自明であることは同値であることを示せ．

問 4.6. M を多様体とし，$\bigwedge^n T^*M$ は自明だとする．ω を体積要素（$\bigwedge^n T^*M$ の大域自明化）とすると，M には次のように向きが定まる．$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ を M の座標近傍系とする．α を一旦固定し，$\varphi_\alpha(U_\alpha)$ の座標を $(x_1, \ldots, x_n)$ とする．$\varphi_\alpha^{-1*}\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ と表す．ω は大域自明化なので $f > 0$ あるいは $f < 0$ が $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ 上成り立つ．$f > 0$ ならば $(V_\alpha, \psi_\alpha) = (U_\alpha, \varphi_\alpha)$ とする．$f < 0$ であれば $\varphi_\alpha = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ と表して $\psi_\alpha = (-\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ と定め，$(V_\alpha, \psi_\alpha) = (U_\alpha, \psi_\alpha)$ とする．

1) このように定めた $\{(U_\alpha, \varphi_p)\}$ は M に向きを定めることを示せ．この向きを体積要素 ω により定まる M の向きと呼ぶ．
2) $-\omega$ により定まる M の向きは ω により定まる向きと逆の向きであることを示せ．

問 4.7. M, N は連結であって，向きづけられているとする．また，$n = \dim M = \dim N$ とする．最後に，$f\colon M \to N$ をはめ込みとする．

1) f は沈め込みであることを示せ．
2) ω_N を N の体積要素とする．$f^*\omega_N$ が M の体積要素であることと，f が向きを保つことは同値であることを示せ．

問 4.8. g はリーマン計量だとする．$\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ を TM の局所自明化であって，$g(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ が成り立つものとする（このような $\mathscr{E}$ を（局所）**正規直交枠**と呼ぶ）．

1) $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)$ を局所座標により定まる TM の局所自明化とする．g に関する正規直交枠を $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ や g の行列表示（の成分）を用いて一つ与えよ．
2) T^*M の局所自明化 $\mathscr{E}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ を条件 $e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ により定める．$\mathscr{E}^*$ を T^*M の $\mathscr{E}$ **に双対な枠**と呼ぶ．$\mathscr{E}^*$ は g^* に関する T^*M の正規直交枠であることを示せ．

問 4.9. V を実線型空間，g を V の計量とする（ユークリッド計量とは仮定しない）．講義のように $V^{r,s}$ 上の双線型形式 $g^{r,s}$ を定めると，$g^{r,s}$ は $V^{r,s}$ の計量であることを示せ．また，特に元の g が V のユークリッド計量であるならば $g^{r,s}$ もユークリッド計量であることを示せ．ヒント：双線型性と対称性は容易に示せる．$\mathscr{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ を V の基底，$\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ を V^* の双対基底とする．このとき，$V^{r,s}$ の基底として $\mathscr{E}^{r,s} = \{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes_{i_r} \otimes e_{j_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{j_s}^*\}$ を考えることができる．$\mathscr{E}$ に関する g の表現行列を G とすると $\mathscr{E}^{r,s}$ に関する $g^{r,s}$ の表現行列

は $G^{\otimes r} \otimes (G^{-1})^{\otimes s}$ により与えられる．このことから $g^{r,s}$ は非退化であることが従う．また，g がユークリッド計量，即ち正値であるならば $g^{r,s}$ も正値であることも従う．

問 4.10. V を実線型空間とし，g を V の計量とする（ユークリッド計量とは仮定しない）．講義のように，行列式を用いて $\bigwedge^s V^*$ 上の双線型形式 g を定めると，g は計量であることを示せ．特に元の g が V 上のユークリッド計量ならば $\bigwedge^s V^*$ 上の g もそうである．
ヒント：$\bigwedge^s V^*$ 上の g を g^* で表す．g^* が対称双線型形式であることは容易に示せる．$\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ を V^* の基底であって，$\mathscr{E}$ に関する g の表現行列が対角行列 $(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus (\lambda_n)$ であるようなものとする．$I = \{i_1, \ldots, i_s \mid i_1 < \cdots < i_s\}$ について $e_I = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_s}$ と定めると，$\{e_I\}$ は $\bigwedge^s V^*$ の基底である．また，

$$g^*(e_I, e_J) = \begin{cases} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_s}, & I = J, \\ 0, & I \neq J \end{cases}$$

が成り立つ．

（以上）