$\mathbb{R}^3$ 上の微分形式とベクトル場について（２）*

以下の内容はベクトル解析においても重要であるが，全体的に「常微分方程式」で扱うことが多い話題である．

問 8.1. $\omega = f_1dx^1 + f_2dx^2 + \cdots + f_ndx^n \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$, $X = g^1\dfrac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + g^n\dfrac{\partial}{\partial x^n} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ とする．

1) $p \in \mathbb{R}^n$ について
$$\omega(X)(p) = \omega_p(X_p)$$
と定めると，
$$\omega(X)(p) = f_1(p)g^1(p) + \cdots + f_n(p)g^n(p)$$
が成り立つことを示せ．また，$\omega(X)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $p \mapsto \omega(X)(p)$ により定めれば $\omega(X)$ は C^∞ 級の函数であることを示せ．

2) $\omega(X)$ が恒等的に 0 であることと，$(f_1(p), \ldots, f_n(p))$, $(g^1(p), \ldots, g^n(p))$ をどちらも（添字の上下は気にしないことにして）$\mathbb{R}^n$ の元とみなしたとき，任意の p についてこれらが（標準的な内積に関して）直交することは同値であることを示せ．

問 8.2. $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ とする．

1) $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ について $\omega = df$ が成り立つことと，ω に対応するベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ について $X = \operatorname{grad} f$ が成り立つことと同値であることを確かめよ．

2) $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ について $\omega = df$ が成り立つとする．$Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ は $\omega(Y) = 0$ を満たすとする．φ を Y の積分曲線とすると（定義域はここでは気にしなくて良い）$f \circ \varphi$ は定数であることを示せ．
ヒント：$\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^n)$ と座標を用いて表すと $\dfrac{d(f\circ\varphi)}{dt}(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(\varphi(t))\frac{d\varphi^i}{dt}(t)$ が成り立つ．$\omega = df$ と φ が積分曲線であることを用いて右辺を書き換えよ．

3) $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ とし．Ψ は 0 を取らないとする．さて，$f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ について $df = \Psi\omega$ が成り立つとする．また，$Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ は $\omega(Y) = 0$ を満たすとする．φ を Y の積分曲線とすると（定義域はここでは気にしなくて良い）$f \circ \varphi$ は定数であることを示せ．

問 8.3 (問全体に目を通した上で，先に問 8.4 を解いた方が良いかも知れない).

$Y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} g^n \frac{\partial}{\partial x^n} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ とし，$p \in \mathbb{R}^2$ について，$\varphi(0) = p$ であるような積分曲線を $\varphi(p,t)$ とする（定義域は気にしなくて良い[†1]）．t を固定して φ を p の函数とみなすとき，$\varphi(p,t) = \varphi_p(t)$，$p$ を固定して φ を t の函数とみなすとき $\varphi(p,t) = \varphi_t(p)$ と表すことにする．

1) $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ について，$Y(f) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} g^n \frac{\partial f}{\partial x^n} = 0$ が成り立つことと，p を固定したとき $f \circ \varphi_p$ が定数であること[†2]は同値であることを示せ（なお，$Y(f)$ に関して最初の等号は定義である．演習の定義 3.4 も参照のこと）．

2) $n = 2$ とし，$p_0 \in \mathbb{R}^2$ とする．また，$Y(p_0) \neq 0 \in T_p\mathbb{R}^2$ とする．

   i) φ_p は p と t の函数とみなし，$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ とみなす．$Y'(p_0) \in T_{p_0}\mathbb{R}^2$ を $\{Y(p_0), Y'(p_0)\}$ が $T_{p_0}\mathbb{R}^2$ の基底であるように選び，$\rho\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $\rho(u^1, u^2) = \varphi(p_0 + u^2 Y'(p_0), u^1)$ により定める[†3]．この時，$\epsilon > 0$ が存在して，$U = \{u = (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid \|u\| < \epsilon\}$ とすると $\rho\colon U \to \rho(U)$ は微分同相写像であることを示せ．

   ヒント：陰函数定理あるいは逆函数定理を用いる．

   ii) $\rho_* \dfrac{\partial}{\partial u^1} = Y$ が成り立つことを示せ．このような性質を持つ $\rho\colon U \to \rho(U)$ を **flow box**（流箱）と呼ぶ．flow box は一意的ではない．また，flow box は $Y \neq 0$ である範囲でしか存在しない．

   iii) $\tau = \rho^{-1}\colon \rho(U) \to U$ とし，$\omega' = \dfrac{\partial \tau^2}{\partial x^1} dx^1 + \dfrac{\partial \tau^2}{\partial x^2} dx^2$ と置く（$\omega' = \tau^* du^2$ である）．τ の第 2 成分 τ^2 を $\rho(U)$ 上の函数とみなすと $\omega' = d\tau^2$ であることを確かめよ．また，$\omega(Y) = 0$ が成り立つならば，ある $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が存在して $\omega = \Phi\omega'$ が成り立つことを示せ．

   ※ 従って，$\Phi \neq 0$ である範囲で，$\dfrac{1}{\Phi}\omega = d\tau^2$ が成り立つ．つまり，$\dfrac{1}{\Phi}$ は ω の積分因子であって，τ は $\dfrac{1}{\Phi}\omega$ の第 1 積分あるいはポテンシャルである．

   iv) $g\colon \rho(U) \to \mathbb{R}$ を $g(p) = \tau^1(p)$ により定める．$\operatorname{grad} g = Y$ が成り立つことを示せ．

[†1]正確には φ は $p_0 \in \mathbb{R}^2$ を固定するごとに $(p_0, 0)$ を含むある開集合で定義され，必ずしも $\mathbb{R}^3$ 全体では定まらない．

[†2]厳密に言えば，$f \circ \varphi_p$ がある区間 I 上で定義されているならば，$f \circ \varphi_p$ は I 上で定数であること，である．

[†3]一般には ρ は十分小さい u^1, u^2 について定まる．

問 8.4. $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ を

$$Y = -\frac{x^2}{(x^1)^2+(x^2)^2}\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{x^1}{(x^1)^2+(x^2)^2}\frac{\partial}{\partial x^2}$$

により定める．

1) $f(x^1,x^2) = (x^1)^2+(x^2)^2$ とする．$Y(f) = 0$ が成り立つことを示せ．
2) $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ とする．$\varphi = (\varphi^1, \varphi^2)$ を Y の積分曲線で，$\varphi(0) = p$ をみたすものとする．φ を求めよ．必要であれば $p = (r_0\cos\theta_0, r_0\sin\theta_0)$ と表して r_0, θ_0 を用いよ．
   ヒント：$\varphi^1\dfrac{d\varphi^1}{dt} + \varphi^2\dfrac{d\varphi^2}{dt}$ を計算してみよ（要は 1) がヒントである）．
3) $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ とする．p を含む Y の flow box を一つ定めよ．
4) $\omega = \dfrac{x^1}{(x^1)^2+(x^2)^2}dx^1 + \dfrac{x^2}{(x^1)^2+(x^2)^2}dx^2$ と置く．$\omega(Y) = 0$ が成り立つことを示せ．
5) $\mathbb{R}^2$ の座標（変数）を (r,θ) とする．また，$\rho\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $\rho(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ と置くことにより定める．
   $$Z = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}$$
   とすると，$\rho_* Z = Y$ が成り立つことを示せ．
6) $p = (p^1,p^2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ とする．$x = (x^1,x^2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ について，$r = \sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}$ とし，$\theta = \arctan\dfrac{x^2}{x^1}$ と置く．θ には $\pi\mathbb{Z}$ だけの任意性があるが，次のようにきちんと定まった函数と考える．即ち，$\arctan\dfrac{p_2}{p_1}$ の値を一つ定める．$\mathbb{R}^2$ の開集合 U であって，p を含むものを十分小さく取れば，U 上 arctan が連続になるように値を一意的に定めることができるので，そのように U と arctan を定める[†4]．$\tau(x^1,x^2) = (r,\theta)$ とし，$\omega' = \dfrac{\partial\theta}{\partial x^1}dx^1 + \dfrac{\partial\theta}{\partial x^2}dx^2$ と置く．ω' を求めよ．
7) 6) において ω' は arctan の定め方に依らないことを示せ．また，自然に $\omega' \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ と考えることができることを確かめよ．
8) $\omega' = dg$ が成り立つような $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ を一つ求めよ．
9) $\omega = \Phi dg$ が成り立つような $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ を一つ求めよ．また，$\omega = dh$ が成り立つような $h \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ を一つ求めよ．

[†4]このあたりの話が怪しければ極座標に関する事項，例えば二重積分を極座標に変換するあたりを復習せよ．

微分方程式と微分形式は関連が深い．例えば物理では解析力学（シンプレクティック形式（正準形式）[†5]，ラグランジュ形式など）であるとか，電磁気学（Maxwell 方程式など）にすぐに現れる．相対論を扱うのであればなおさらである.「微分積分学続論」,「常微分方程式」や「ベクトル解析」の内容を一体として理解することが先々大切である．

（以上）

[†5] 関連してハミルトニアンは重要である．