２０１７年度ベクトル解析（理 I 向け，足助担当）演習問題 5 v2　　2017/5/12（金）
’17/5/18：問 5.6 において，記号の説明を追加．

問 5.1. $S^2 = \{{}^t(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1\}$ とする（S^2 は **2 次元球面**と呼ばれる）．

1) $f(x^1, x^2, x^3) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$ とすると 1 は f の正則値であることを確かめよ．また，S^2 は C^∞ 級の曲面であることを示せ．
2) $D = \mathbb{R}^2$ とし，$\varphi\colon D \to S^2$ を $u = (u^1, u^2)$ について
$$\varphi(u) = \begin{pmatrix} \sin u^1 \cos u^2 \\ \sin u^1 \sin u^2 \\ \cos u^1 \end{pmatrix}$$
と置くことにより定めると，φ は C^∞ 級の大域的なパラメータ付けであることを確かめよ．また，$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ を φ が $(a, b) \times (c, d)$ から S^2 への全単射になるように定めよ（定め方は一意ではない）．
3*) 2) のように a, b, c, d を定める．$V = \varphi((a, b) \times (c, d)) \subset S^2$ とすると，φ は $(a, b) \times (c, d)$ から V への C^r 級の微分同相写像であることを示せ．

問 5.2. $D = \mathbb{R}^2$ とし，$\varphi\colon D \to \mathbb{R}^3$ を $u = (u^1, u^2)$ について
$$\varphi(u) = \begin{pmatrix} (2 + \cos u^1) \cos u^2 \\ (2 + \cos u^1) \sin u^2 \\ \sin u^1 \end{pmatrix}$$
と置くことにより定める．$T^2 = \varphi(D)$ とすると，φ は C^∞ 級の大域的なパラメータ付けであることを確かめよ．また，$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ を φ が $(a, b) \times (c, d)$ から T^2 への全単射になるように定めよ（定め方は一意ではない）．T^2 は **2 次元トーラス**（円環面）と呼ばれる．

問 5.3. 例 2.1.14 の 2) について，

1) $a < 0$ の時，Σ は C^∞ 級の特異点のない曲面であることを示せ．
3) $a = 0$ の時，Σ は C^1 級の特異点のない曲面の構造を持たないことを示せ．
ヒント：うまく行かないのは $S = \{{}^t(0, 0, x^3) \mid x^3 \in \mathbb{R}\} \subset \Sigma$ の周りである．$p \in S$ について，p の周りの C^1 級の局所パラメータが存在したとして，p における微分を調べてみよ．
4) $a > 0$ の時，Σ は C^∞ 級の自己交叉をもつ曲面であることを示せ．

問 5.4. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を $f(x^1, x^2, x^3) = (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$ により定め，$c \in \mathbb{R}$ について

$$\Sigma_c = \{x = {}^t(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = c\}$$

と置く．

1) $c \neq 0$ ならば Σ は曲面であることを示せ．
2) $c > 0$ とする．この時 Σ_c は弧状連結であることを示せ．また，Σ_c の大域的なパラメータ表示を一つ与えよ．
3) $c < 0$ とする．このとき，Σ_c は弧状連結でないことを示せ．実際には Σ_c は二つの「繋がった部分」（**弧状連結成分**と呼ぶ[†1]）に分かれる．このとき，それぞれの「繋がった部分」に関して大域的なパラメータ表示を一つ与えよ．
4) $c = 0$ とする．Σ_0 は弧状連結であることを示せ．また，大域的なパラメータ表示を一つ与えよ．

5*) Σ_0 は C^1 級の特異点のない曲面の構造を持たないことを示せ．
ヒント：問 5.3 の 2) と同様に示せる．

問 5.5. $v, w \in \mathbb{R}^3$ について，$z \in \mathbb{R}^3$ であって

$$\forall\, u \in \mathbb{R}^3,\ \det(v\ w\ u) = \langle z \mid u \rangle$$

をみたすものが唯一存在することを示せ．また，これを $v \times w$ とすると，成分を用いれば

$$v \times w = {}^t\left(\det\begin{pmatrix} v^2 & w^2 \\ v^3 & w^3 \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} v^3 & w^3 \\ v^1 & w^1 \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} v^1 & w^1 \\ v^2 & w^2 \end{pmatrix}\right)$$

が成り立つことを示せ．

問 5.6. $A \in M_n(\mathbb{R})$ について $\|A\| = \sqrt{{}^tA\,A}$ と定める．また，A の余因子行列を $\widehat{A}$ で表す．

1) $M_n(\mathbb{R})$ を，成分を縦に並べて（並べ方は問わない）$\mathbb{R}^{n^2}$ と同一視する．このとき $\|\cdot\|$ は $\mathbb{R}^{n^2}$ の標準的なノルムと一致することを示せ．
2) $A \in M_n(\mathbb{R})$ とする．$\forall \epsilon > 0,\ \exists A_\epsilon \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ \|A_\epsilon - A\| < \epsilon$ が成り立つことを示せ．
3) $\forall \epsilon > 0,\ A_\epsilon \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$，$\lim_{\epsilon \to 0} A_\epsilon = A$ が成り立つとする．この時，$\lim_{\epsilon \to 0} \widehat{A_\epsilon} = \widehat{A}$ が成り立つことを示せ．
ヒント：$\widehat{A}$ の成分は A の成分の多項式である．

[†1]弧状連結性ではなく，連結性について考えているときには**連結成分**と呼ぶ．

4) $v, w \in \mathbb{R}^3$ に対して $v \times w \in \mathbb{R}^3$ を対応させる写像は，$v, w, v \times w$ の成分を考えることにより $\mathbb{R}^3$-値の 6 変数函数と見なせる．このとき，この函数は連続であることを示せ．

5) $\lim_{\epsilon \to 0} A_\epsilon = A$ が成り立つ時，$\lim_{\epsilon \to 0} A_\epsilon v \times A_\epsilon w = Av \times Aw$ が成り立つことを示せ．

上下の添字について．

ベクトル解析，より一般にテンソル解析では上下の添字を用いてベクトル，あるいはベクトルの性質を区別（峻別）する．一般にはある空間 X の各点 $x \in X$ に対して線型区間 V_x が付随している状況を考える．$X = \{x\}$ として V_x のみを考える，即ち線型空間の場合が基本的なので，ここでは線型空間について扱うこととし，V_x を単に V で表す．

大原則として，V の元は添字を下に，$V^* = \{f \colon V \to \mathbb{R} \mid f$ は線型$\}$ の元は添字を上に付ける（V^* は $V^\vee$ で表すことも少なくない）．従って，V の基底は例えば $\{e_1, \dots, e_n\}$ と表され，V^* の基底は $\{e^1, \dots, e^n\}$ と表される．これまでに現れた例としては $T_p\mathbb{R}^n$ の基底 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \dfrac{\partial}{\partial x^n}\right\}$，$T_p^*\mathbb{R}^n$ の基底 $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ が挙げられる．なお，$\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ については，上に添字が付いている x^i が分母にあるので添字が下に付いていると考える．

もう一つの大原則は基底や座標系（慣性系）などの取り替えで不変な，空間に直接付随している量は全体として添字が上下で打ち消し合っていることである．V の元は $e_1v^1 + \dots + e_nv^n$ と表され，$(v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n$ と（必要であれば転置を取れば）同一視されるが，$(v^1, \dots, v^n)$ は基底の選び方に依存する．一方，線型結合 $e_1v^1 + \dots + e_nv^n$ は基底を取り替えるとそれに応じて $(v^1, \dots, v^n)$ が変化して，V の一定の元を表す．

問 5.7. $\mathscr{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$, $\mathscr{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ を V の基底とする．P を $\mathscr{E}$ から $\mathscr{F}$ への基底の変換行列とする．即ち，$P = (p^i_j)$ とすると $f_j = \sum_{i=1}^n e_i p^i_j$ が成り立つとする．

1) $v \in V$ を $v = \sum_{i=1}^n e_i v^i = \sum_{j=1} f_j w^j$ と表すと $v^i = \sum_{j=1}^n p^i_j w^j$ が成り立つことを示せ．逆に，$(v^1, \dots, v^n)$, $(w^1, \dots, w^n)$ がこの関係を満たすならば，$\sum_{i=1}^n e_i v^i = \sum_{j=1}^n f_j w^j$ が成り立つことを示せ．

2) $\mathscr{E}^* = \{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$, $\mathscr{F}^* = \{f_1^*, \ldots, f_n^*\}$ を V^* の双対基底とする．即ち，$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$，$f_i^*(f_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ が成り立つとする．$\mathscr{F}^*$ から $\mathscr{E}^*$ への基底の変換行列は P であることを示せ．即ち，$e_i^* = \displaystyle\sum_{j=1}^n f_j^* p_j^i$ が成り立つことを示せ．

V, W を線型空間，$g\colon V \to W$ を線型写像とする．$\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$, $\mathscr{F} = (f_1, \ldots, f_m)$ をそれぞれ V, W の順序付き基底とすると，$(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ に関する g の表現行列 $A = (a_j^i)$ が条件

$$g(e_j) = \sum_{i=1}^m f_i a_j^i$$

により定まるのであった．

問 5.8. 1) $v = \displaystyle\sum_{j=1}^n e_j v^j \in V$ とすると $g(v) = \displaystyle\sum_{i,j} f_i a_j^i v^j$ が成り立つことを示せ．

2) $\mathscr{E}' = (e_1', \ldots, e_n')$, $\mathscr{F}' = (f_1', \ldots, f_m')$ をそれぞれ V, W の順序付き基底とし，$P = (p_j^i)$, $Q = (q_j^i)$ をそれぞれ $\mathscr{E}$ から $\mathscr{E}'$，$\mathscr{F}$ から $\mathscr{F}'$ への基底の変換行列とする．また，$R = (r_j^i) = Q^{-1}$ とする．このとき，$B = (b_j^i)$ を $(\mathscr{E}', \mathscr{F}')$ に関する g の表現行列とすると

$$b_j^i = r_k^i a_l^k p_j^l$$

が成り立つ，即ち $B = Q^{-1}AP$ が成り立つことを示せ．

※ しばしば $Q = (q^i{}_j)$ と位置まで込めて上下を尊重し（この方がより正確で，伝統的な記法である），r_j^i を $q_j{}^i$，$Q^{-1} = (q_i{}^j)$ と表す．これに従うならば，上の式は

$$b^i{}_j = q_k{}^i a^k{}_l p^l{}_j$$

と表される．

特に V の線型変換は正方行列，例えば A，で表される．成分で表すならば $A = (a_j^i)$ である．

ここまで現れた正方行列は線型変換にせよ，基底の変換行列にせよ，成分は a_j^i と表すのが自然であった．しかしいつもそうというわけではない．

定義 5.9. g を V のユークリッド計量とする．また，$\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ を V の順序付き基底とする．$g_{ij} = g(e_i, e_j)$ と置き，$G = (g_{ij})$ を g の $\mathscr{E}$ に関する表現行列と呼ぶ．

問 5.10. $v = \sum_{i=1}^{n} e_i v^i$, $w = \sum_{j=1}^{n} e_j w^j \in V$ とする．このとき，

$$g(v, w) = \sum_{i,j} g_{ij} v^i w^j$$

が成り立つことを示せ．

問 5.11. $\mathscr{E}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ を $\mathbb{R}^n$ の順序付き基底とし，$\mathscr{E}$ から $\mathscr{E}'$ への基底の変換行列を $P = (p^i_j)$ とする．$G' = (g'_{ij})$ を g の $\mathscr{E}'$ に関する表現行列とすると

$$g'_{ij} = \sum_{k,l} p^k_i g_{kl} p^l_j$$

が成り立つことを示せ．また，これは $G' = {}^tPGP$ と同値であることを示せ．

問 5.12 ***.** $\mathscr{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ を V の基底とし，$v, w \in V$ を $v = \sum_{i=1}^{n} e_i v^i$, $w = \sum_{j=1}^{n} e_j w^j$ と表す．

1) $s_{\mathscr{E}} = \sum_{i,j} v^i w^j$ と置く．$s_{\mathscr{E}}$ は一般には $\mathscr{E}$ に依り，一定ではないことを示せ．
2) V のユークリッド計量 g を一つ固定し，V の順序付き基底 $\mathscr{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ に関する g の表現行列を $G_{\mathscr{F}} = (g_{ij;\mathscr{F}})$ とする．$S = \sum_{i,j} g_{ij;\mathscr{E}} v^i w^j$ と置くと，S は順序付き基底 $\mathscr{E}$ の選び方に依らないことを示せ．

（以上）