２０１７年度数理科学基礎II（理I 24–27組向け，足助担当）演習問題 ４ v2　2017/5/1（月）
’17/5/1：問 3.5，3.6 を追加．

問 4.1. $U \subset \mathbb{R},\ f\colon U \to \mathbb{R}^m$ とする．f が $a \in U$ で連続であることと，f が a で右連続かつ左連続であることは同値であることを示せ．

問 4.2. $I = [a, b],\ a < b$ とする．$f\colon I \to \mathbb{R}$ が連続であることと，三条件

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in (a, b),\ \exists \delta > 0,\ y \in (x - \delta, x + \delta) \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ y \in [a, a + \delta) \Rightarrow |f(y) - f(a)| < \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ y \in (b - \delta, b] \Rightarrow |f(y) - f(b)| < \varepsilon$$

が成り立つことは同値であることを示せ．

問 4.3.
1) f は連続ではないが，g は連続であって，$g \circ f$ も連続であるような例を挙げよ．
2) f は連続であるが，g は連続ではなく，$g \circ f$ は連続であるような例を挙げよ．
3) f, g はいずれも連続でないが，$g \circ f$ が連続であるような例を挙げよ．

問 4.4*. $U \subset \mathbb{R}$ を開区間あるいは半開区間とする（有界とは限らない）．また，$f\colon U \to \mathbb{R}$ を連続とする．

1) f が単射であることと f は狭義単調増加あるいは狭義単調減少であることは同値であることを示せ．
2) f が単射（従って狭義単調増加あるいは狭義単調減少）であるとする．f が狭義単調増加（減少）であれば，f^{-1} も狭義単調増加（減少）であることを示せ．また，$f(U)$ も区間であって，f は $f(U)$ への全単射であることと，f^{-1} も連続であることを示せ．

ヒント：まず $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$，ただし，($\forall n,\ a_{n+1} < a_n$ あるいは $\forall n,\ a_{n+1} = a_n$) かつ ($\forall n,\ b_n < b_{n+1}$ あるいは $\forall n,\ b_n = b_{n+1}$) と表せることを示し，閉区間の場合の結果を用いよ．

問 4.5. 以下のように函数 f（と f'）を定めたとき，連続である，あるいは連続でないことを示せ．

1) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を多項式とする．即ち，$n \in \mathbb{N},\ a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ が存在して $f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ が成り立つとする．
2) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(t) = \begin{cases} 1 & t \in \mathbb{Q}, \\ 0 & t \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ により定める．
3) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$ により定める．

4) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(t) = \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid n < t\}$ により定める．

5) $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < 1\}$ と置き，$f\colon D \to \mathbb{R}$ を $f(x) = 1$ とする．

5') $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < 1\}$ と置き，$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in D, \\ 0, & x \notin D \end{cases}$ とする．

ヒント：5) の f は連続で，5') の f は連続ではない．

6) $g, h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を連続とし，$f(x) = \max\{g(x), h(x)\}$ とする．また，$f'(x) = \min\{g(x), h(x)\}$ とする．

7) $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を連続とし，$f(x) = |g(x)|$ とする．なお，この f をしばしば $|g|$ で表す．

問 4.6. 1) $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ とする．$\min\{f(x), g(x)\} = -\max\{-f(x), -g(x)\}$ が成り立つことを示せ．

2) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ とする．$f_+, f_-\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ をそれぞれ $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$，$f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}$ により定める．

a) $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ が成り立つことを示せ．

b) $|f|\,(x) = f_+(x) + f_-(x)$ が成り立つことを示せ．

c) f が有界であることと，f_+, f_- はいずれも有界であることは同値であることを示せ．

d) f が連続ならば f_+, f_- はいずれも連続であることを示せ（a) により逆も成り立つ）．

（以上）