

2017年度数理科学基礎II(理I 24-27組向け, 足助担当) 演習問題 2 v5 2017/4/17(月)

'17/4/25: 冒頭の注を追加. 問 2.7 の 1) を修正.

'17/5/2: 定義 2.5 と補足を追加. (旧) 問 2.5 以下は番号をずらした.

'17/5/3: 定義 2.11 以下を追加.

'17/5/9: 定義 2.5 の誤植を修正.

注. 例えば主張「 $\exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \|a_n - a\| < \epsilon$ 」を「 $\exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow \|a_n - a\| < \epsilon$ 」と表すことがある。「s.t.」は「such that」の略で, 英文としては正しくないが^{†1}, 数学では良く用いる.

問 2.1. 数列の収束の定義における条件

$$(*) \quad \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow \|a_n - a\| < \epsilon$$

に関して, 以下を示せ.

1) 条件 (*) は以下の条件と互いに (従って全て) 同値であることを示せ.

a) $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n > N \Rightarrow \|a_n - a\| < \epsilon$

b) $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow \|a_n - a\| \leq \epsilon$

c) $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow \|a_n - a\| < 2\epsilon$

d) $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq 2N \Rightarrow \|a_n - a\| < 2\epsilon$

2) 条件 (*) は条件

$$(*') \quad \forall \epsilon \geq 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow \|a_n - a\| < \epsilon$$

と同値でない. このことを, 0 に収束するが条件 (*) をみたさない数列を具体的に構成することにより示せ (条件が同値であるとした場合の反例を与えよ). また, 実際には条件 (*) をみたす (a_n) は存在しないことを示せ.

問 2.2. $a, b \in \mathbb{R}$ とすると $\|a\| - \|b\| \leq \|a - b\|$ が成り立つことを示せ.

問 2.3. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を \mathbb{R}^m の点列とし, $x_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,m})$ と成分を用いて表す. また, $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ とする. このとき, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ が成り立つことと, 任意の k について $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n,k} = a_k$ が成り立つことは同値であることを示せ.

問 2.4. 有界な実数列であって, 収束しないものの例を一つ挙げよ.

定義 2.5. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を \mathbb{R} の点列とする.

^{†1}ラテン系の言語では多くの場合正しい.

1) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の上極限を次のように定め、 $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$ あるいは $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n$ で表す。まず、 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が上に有界でないときには $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ とする。次に、 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が上に有界だとする。 $n \in \mathbb{N}$ とし、 $s_n = \sup_{m \geq n} a_m$ とする。 $s_{n+1} \leq s_n$ が成り立つ。 $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が $n \rightarrow +\infty$ において $-\infty$ に発散するならば $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$ とする。 $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が $-\infty$ に発散しなければ、下に有界であるから $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は $n \rightarrow +\infty$ の時ある値に収束する。この値を $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$ とする。

2) 次のように $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の下極限を定め、 $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n$ あるいは $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n$ で表す。 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が下に有界でないときには $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$ とする。 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が下に有界ならば、 $n \in \mathbb{N}$ について $s_n = \inf_{m \geq n} a_m$ とする。 $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が $n \rightarrow +\infty$ において $+\infty$ に発散するならば $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ とし、収束するならばその値を $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n$ と定める。

問 2.6*. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を \mathbb{R} の点列とし、 $a = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$ は有限の値だとする。このとき、

$$\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N \text{ s.t. } a_n > a - \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ s.t. } a_n \geq a + \varepsilon \Rightarrow n \leq N$$

がそれぞれ成り立つことを示せ。

※ 直感的に言えば、 $a_n > a - \varepsilon$ なるような n は無限個存在し、一方、 $a_n \geq a + \varepsilon$ なるような n は高々有限個しか存在しない^{†2}。逆に、 $a \in \mathbb{R}$ についてこれらの条件が成り立てば $a = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$ が成り立つ。

問 2.7*. 定義 2.5 において、 $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} s_n$, $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} s_n$ がそれぞれ成り立つことを示せ（それぞれが有限の値の場合に示せばよいが、 $\pm\infty$ の場合でも適切に定義することで正当化できる）。

問 2.8*. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を実数列とする。ある $a \in \mathbb{R}$ について $a = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n$ が成り立つことと、 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ が成り立つことは同値であることを示せ。

ヒント：例えば問 2.6 を用いるとよい..

問 2.9. 以下のように数列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を定めるとき、 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の $n \rightarrow +\infty$ における上極限と下極限を求めよ。これらが一致する場合には、数列がその値に収束することを直接示せ。

1) $a_0 = 1, a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$.

2) $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$. ただし $n \geq 1$ とする。

3) $a_n = n^{-n}$ ただし $n \geq 1$ とする。

^{†2}ここでは 0 を自然数としているので、「高々」は不要であるが、一つもない可能性があることを強調するために残した。

問 2.10. $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, $p \in \mathbb{Z}$ とし, \mathbb{R}^2 の点列 $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ を $a_n = \begin{pmatrix} x^n \\ 2^{pn} \end{pmatrix}$ により定める. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が $n \rightarrow +\infty$ において収束するための x, p に関する必要十分条件を求めよ.

補足.

講義での系 2.2.10 の証明は不必要に複雑であったので, より簡単なものを一つ与える.

系 2.2.10. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を \mathbb{R}^m の有界な点列とする. このとき, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の (無限) 部分列で, ある $b \in \mathbb{R}^m$ に収束するものが存在する.

証明. $S = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ とする. S が無限集合であるならば, (定理 2.2.9 により) S の (無限) 点列 $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ であって互いに異なり, また, $k \rightarrow +\infty$ において収束するものが存在する. 収束極限を $b \in \mathbb{R}^m$ とする. 定め方により各 k について $i(k) \in \mathbb{N}$ が存在して $s_k = a_{i(k)}$ が成り立つ. $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ は無限点列であるから, k_0, k_1, \dots を $i(k_0) < i(k_1) < \dots$ なるように選ぶことができる. 実際, $k_0 = 0$ とし, k_0, \dots, k_l まで定まったとして, $I = \max\{i(k_0), \dots, i(k_l)\}$ とすれば, $i(k) \leq I$ なる k は高々 $I + 1$ 個である. そこで $b_j = a_{i(j)}$ と置けば, (補題 2.1.14 により) $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$ は $j \rightarrow +\infty$ において b に収束する $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の部分列である. S が有限集合だとする. $S = \{s_0, \dots, s_r\}$ とすると, ある p , $0 \leq p \leq r$ について $a_n = s_p$ なる $n \in \mathbb{N}$ が無限個存在する. そこで, そのような a_n のみを考えた物を $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ とすると, 実際には k によらず $b_k = s_p$ であるから (b_k) は s_p に収束する (無限) 部分列である. □

\mathbb{R}^n の開集合と閉集合*.

開集合や閉集合については数理科学基礎ではあまり気にしなくて良いが, 微分や積分を本格的に扱う際には必要となる.

定義 2.11. $r > 0$, $p \in \mathbb{R}^n$ とする. $B_p(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - p\| < r\}$ と置いて, p を中心とする半径 r の開球と呼ぶ. また, $\overline{B_p(r)} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - p\| \leq r\}$ と置いて, p を中心とする半径 r の閉球と呼ぶ.

$B_p(r)$ は $B_r(p)$ など, いろいろな記号で表される. $r = 0$ の場合を許すこともあるが, 記号に一貫性がなくなるのでここでは $r > 0$ とする.

定義 2.12. $U \subset \mathbb{R}^n$ が開集合であるとは, $U = \emptyset$ であるか, あるいは $\forall p \in U, \exists r > 0, B_p(r) \subset U$ が成り立つことを言う. $C \subset \mathbb{R}^n$ が閉集合であるとは, $\mathbb{R}^n \setminus C$ が開集合であることを言う.

問 2.13. 1) $p \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ とすると $B_p(r)$ は開集合であることを示せ.

2) $p \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ とすると $\overline{B_p(r)}$ は閉集合であることを示せ.

3) $\emptyset, \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n$ はいずれも開集合かつ閉集合であることを示せ.

問 2.14. $U \subset \mathbb{R}^n$ が開集合であることと, 開球の族 $\{B_{p_\lambda}(r_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在して $U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_{p_\lambda}(r_\lambda)$ が成り立つことは同値であることを示せ.

ヒント: U が開集合ならば, $\{r_p\}_{p \in U}$ を適切に定めることにより $U = \bigcup_{p \in U} B_p(r_p)$ が成り立つ.

問 2.15. Λ を添字集合とし, $X_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ とする.

- 1) $\mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (\mathbb{R}^n \setminus X_\lambda)$ が成り立つことを示せ.
- 2) $\mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\mathbb{R}^n \setminus X_\lambda)$ が成り立つことを示せ.

問 2.16. 1) $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を \mathbb{R}^n の開集合の族とする. 即ち, Λ は集合であって, $\lambda \in \Lambda$ について U_λ は \mathbb{R}^n の開集合とする. このとき, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ は \mathbb{R}^n の開集合であることを示せ.

2) $\{U_0, \dots, U_r\}$ を \mathbb{R}^n の開集合の族とする. このとき, $U_0 \cap \dots \cap U_r$ は \mathbb{R}^n の開集合であることを示せ.

3) $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を \mathbb{R}^n の閉集合の族とする. このとき, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ は \mathbb{R}^n の閉集合であることを示せ.

4) $\{C_0, \dots, C_r\}$ を \mathbb{R}^n の閉集合の族とする. このとき, $C_0 \cap \dots \cap C_r$ は \mathbb{R}^n の閉集合であることを示せ.

問 2.17. 1) $a < b \in \mathbb{R}$ とし, $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ とする. I を閉集合の和集合として表せ. また, I を有限個の閉集合の和集合としては表せないことを示せ.

2) $a \leq b \in \mathbb{R}$ とし, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ とする. I を開集合の共通部分 (交わり) として表せ. また, I を有限個の開集合の共通部分としては表せないことを示せ.

3) $a < b \in \mathbb{R}$ とし, $I = [a, b)$ とする. I は開集合でも閉集合でもないことを示せ.

4*) $U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とする. U は \mathbb{R}^n の, 半径が正の閉球の和集合として表されることを示せ.

ヒント: $p \in U$ とすると, p を含むある開球が U に含まれる. この開球に含まれる, 半径が正の閉球について考えてみよ. なお, 半径が 0 で良ければ $U = \bigcup_{p \in U} \{p\}$ である.

問 2.18. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を \mathbb{R}^n の収束する点列とする. 集合 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ は \mathbb{R}^n の閉集合であることを示せ. また, 逆が成り立たない例を一つ挙げよ.

(以上)