２０１７年度微分積分学（理Ｉ 24–27 組向け，足助担当）演習問題 １８ v5 '17/10/30（月）
'17/11/6 : 問 18.4 を修正．問 18.5 と 18.6 を追加．
'17/11/7 : 問 18.2 の 6), 7) を追加（7) は難しいので放っておいても良い）．また，問 18.5 と 18.6 を改変．
'17/11/7 : 問 18.6 がおかしかったので修正．問 18.4 の 2) のヒントを修正．問 18.5 は問 18.4 と直接関係はなくなってしまったが，それはそれとして意味があるのでそのままとする．

問 18.1. $P \subset \mathbb{R}^n$ を閉区間の直積とし，$f\colon P \to \mathbb{R}$ は可積分とする．$p_1, \ldots, p_k \in P$ とし，$g\colon P \to \mathbb{R}$ は $P \setminus \{p_1, \ldots, p_k\}$ 上で f に等しいとする．このとき，g は P 上可積分であって，$\displaystyle\int_P g(x)dx = \int_P f(x)dx$ が成り立つことを示せ．

問 18.2. $a < b$ とし，$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ を C^0 級の曲線とする．$\Delta = \{x_0, \ldots, x_k \mid x_0 = a < x_1 < \cdots < x_k\}$ を $[a,b]$ の分割とし（k は分割ごとに定まり，一定ではない），

$$\lambda(f;\Delta) = \sum_{i=1}^{k} \|f(x_i) - f(x_{i-1})\|$$

と定める．

1) Δ' が Δ の細分であるならば $\lambda(f;\Delta') \geq \lambda(f;\Delta)$ が成り立つことを示せ．
   ヒント：Δ' は Δ に分点を付け加えて得られる．$I \in \mathcal{I}(\Delta)$ それぞれについて，これが更に分割される場合と，そうでない場合をそれぞれ考えてみよ．
2) Δ, Δ' を $[a,b]$ の分割とする．Δ'' を Δ, Δ' の共通細分とする（今の場合，Δ'' を Δ, Δ' の分点を全て合わせて考えた物とすることと同値である）．このとき，$\lambda(f;\Delta'') \geq \max\{\lambda(f;\Delta), \lambda(f;\Delta')\}$ が成り立つことを示せ．
3) $l(f) = \sup_{\Delta} \lambda(f;\Delta)$ と置く．$\delta(\Delta) = \max_{1 \leq i \leq k} |x_i - x_{i-1}|$ とすると，
   $$l(f) = \lim_{\delta(\Delta) \to 0} \lambda(f;\Delta)$$
   が次の意味で成り立つことを示せ．即ち，
   a) $l(f) < +\infty$ ならば
   $$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \delta(\Delta) < \delta \Rightarrow |l(f) - \lambda(f;\Delta)| < \epsilon$$
   が成り立つ．

b) $l(f)=+\infty$ ならば

$$\forall M>0,\ \exists\delta>0,\ \delta(\Delta)<\delta\Rightarrow\lambda(f;\Delta)>M$$

が成り立つ．

4) $l(f)\geq b-a$ が成り立つことを示せ．

5) f が C^1 級ならば，$l(f)=\displaystyle\int_a^b\sqrt{1+Df(t)^2}dt$ が成り立つことを示せ．特に $l(f)<+\infty$ が成り立つ．

6) f を C^1 級，$\varphi\colon[a',b']\to[a,b]$ を C^1 級とする．$[a',b']$ 上 $D\varphi(t)>0$ が成り立つならば $g=f\circ\varphi$ とすると $l(g)=l(f)$ が成り立つことを示せ．この意味で f で表される曲線の長さはパラメータの取り方によらない．

7**) 6) は f を C^0 級としても成り立つことを示せ．
※ 現時点で解けなくても構わない．

以降はやや難しい．現時点では解くことに固執せず，微分可能な曲線とそうでないものの差が大きいこと（と,「足し算」が非常に難しいこと）を見て取れれば良い．

問 18.3 *. $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}^2$ を以下のように定める．まず $C\subset[0,1]$ を以下のように定める．

a) $k\in\mathbb{N},\ 1\leq j\leq 2^k$ について，$a_{k,j}$ を

$$\begin{aligned}(a_{k,1},a_{k,2},\dots,a_{k,2^k})=(&1,7,19=2\cdot3^2+1,25=2\cdot3^2+7,55=2\cdot3^3+1,\\&2\cdot3^3+7,2\cdot3^3+19,2\cdot3^3+25,\dots,3^{k+1}-1)\end{aligned}$$

により定める．やや複雑であるが，3 進数では

$$1_3,21_3,201_3,221_3,2001_3,2021_3,2201_3,2221_3,\dots,\overbrace{2\cdots2}^{k\text{ 個}}1_3$$

である（右下の「3」は 3 進数表示であることを表す）．

b) $I_{k,j}=\left[\dfrac{a_{k,j}}{3^{k+1}},\dfrac{a_{k,j}+1}{3^{k+1}}\right]$ と置き，$C=\displaystyle\bigcup_{k,j}I_{k,j}$ と定める．

1) $(k,j)\neq(k',j')$ ならば $I_{k,j}\cap I_{k',j'}=\varnothing$ が成り立つことを示せ．

2) C を図示せよ．

3) $\forall t\in[0,1],\ \exists\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset C,\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty}x_n=t$ が成り立つことを示せ．

c) $k \in \mathbb{N},\ 1 \leq j \leq 2^k$ について $b_{k,j}$ を

$$\begin{aligned}(b_{k,1}, b_{k,2}, \dots, b_{k,2^k}) &= (1_2, 11_2, 101_2, 111_2, \dots, \overbrace{1\cdots 1}^{k\text{ 個}} 0_2) \\ &= (1, 3, 5, 7, \dots, 2^{k+1}-1)\end{aligned}$$

により定める．

d) $t \in C$ とする．$t \in I_{k,j}$ なる k, j が一意的に存在するので，$f(t)$ を

$$f(t) = \frac{b_{k,j}}{2^{k+1}}$$

により定める．

4) $f\colon C \to \mathbb{R}$ のグラフを図示せよ．

5) $t \in [0,1]$ とする（$t \notin C$ とは仮定していないことに注意せよ）．$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C$ を $\lim_{n\to+\infty} x_n = t$ なるように選ぶと $\lim_{n\to+\infty} f(x_n)$ は存在して，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の選び方に依らないことを示せ．

e) そこで，5) により定まる値を $f(t)$ とする．

6) $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ は連続であることを示せ．

7) $l(f) = 2$ が成り立つことを示せ．

8) $\mathring{C} = \bigcup_{k,j} \left(\frac{a_{k,j}}{3^{k+1}}, \frac{a_{k,j}+1}{3^{k+1}} \right)$ と置く．$t \in \mathring{C}$ ならば $Df(t)$ が定まり，0 に等しいことを示せ．

ところで，3) の結果は $[0,1]$ の元で，C に属していない点も「大体」C の点であることを意味する．その意味で C は $[0,1]$ の「ほとんど全部」の部分である．これを踏まえて，$l(f)$ を得るために，大雑把に $\sqrt{1 + Df(t)^2}$ を C 上で積分して（「端」では左右の微分を考えることにする）$l(f)$ を得ようとすると，$l(f) = 1$ が成り立つように考えられる．しかし，7) はそれは正しくないことを意味する．つまり，f は $[0,1]$ の「ほとんど全部」で微分が消えているのに，その長さは 1 ではない．C は **Cantor の 3 進集合**，f のグラフは**悪魔の階段（devil's ladder）**と呼ばれる．

問 18.4 ***.** $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ を次のように定める．$k \in \mathbb{N},\ k \geq 1$ とする．$1 \leq j \leq 2^k$ について $I_{k,j} = \left[\dfrac{j-1}{2^k}, \dfrac{j}{2^k}\right]$ とする．$t \in [0,1]$ について，$t \in I_{k,j}$ とし，

$$g_k(t) = \begin{cases} \left(t - \dfrac{j-1}{2^k}\right), & j \text{ が奇数}, \\ \dfrac{1}{2^k} - \left(t - \dfrac{j-1}{2^k}\right), & j \text{ が偶数} \end{cases}$$

と定める．そして，$f(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} g_k(t)$ と定める．f は**高木函数**と呼ばれる[†1]．また，γ を f のグラフとする．$\gamma(t) = (t, f(t))$ である．

1) f は連続であることを示せ．
2) $[a,b] \subset [0,1],\ a < b$ とする．γ の $[a,b]$ への制限を $\gamma_{a,b}$ とすると $l(\gamma_{a,b}) = +\infty$ が成り立つことを示せ．

   ヒント：$[a,b]$ がある $I_{k,j}$ に等しい場合を示せば十分である．必要であれば問 18.6 を用いてみよ．

問 18.5. $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ を C^r 級の曲線とする．また，$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ とし，$\varphi_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $\varphi_A(x) = Ax$ により定める．最後に，$f_A\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ を $f_A = \varphi_A \circ f$ により定める．図形的には f_A は f を φ_A で写して得られる曲線である．

1) $r \geq 1,\ n = 2$ とする．$r \geq 1$ とする．$l(f_A) = \displaystyle\int_a^b \sqrt{{}^tDf(t)\,{}^tA\,ADf(t)}\,dt$ が成り立つことを示せ．
2) $A \in \mathrm{O}_n = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA\,A = A\,{}^tA = E_n\}$ とする[†2]．このとき，$l(f_A) = l(f)$ が成り立つことを示せ．

   ヒント：$r > 0$ ならば 1) から従う．$r = 0$ の時には定義に戻るのがよい．
3) $v \in \mathbb{R}^n$ とし，$\psi_v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $\psi_v(x) = x + v$ により定める．$f_v = \psi_v \circ f$ とすると $l(f_v) = l(f)$ が成り立つことを示せ．
4) $r = 0,\ n = 2$ とし，f は $f(t) = {}^t(t, g(t))$ と表されるとする．
   a) f が連続であることと g が連続であることは同値であることを示せ．また，f が C^1 級であることと g が C^1 級であることは同値であることを示せ．

[†1]「高木」は高木貞治である．

[†2]O_n は n 次の**直交群**，O_n の元は n 次の**直交行列**と呼ばれる．$A \in \mathrm{O}_n$ であることと φ_A は $\mathbb{R}^n$ の標準的なユークリッド計量を保つことは同値である（これらのことについては線型代数学で扱う）．

b) $\lambda > 0$ とし，$f_\lambda\colon [a/\lambda, b/\lambda] \to \mathbb{R}^2$ を $f_\lambda(t) = (t, g(\lambda t))$ により定める．

$$l(f_\lambda) > l(f), \quad \lambda < 1,$$
$$l(f_\lambda) < l(f), \quad \lambda > 1$$

が成り立つことを示せ．

ヒント：まずは f が C^1 級の場合に考えてみよ．f が C^0 級の場合には f の微分は使えないので議論を修正する必要がある．

問 18.6. 問 18.4 の記号をそのまま用いる．$f_n = \sum_{k=1}^{n} g_k$ とし，γ_n を f_n のグラフとする．

1) $l(\gamma) = \sup_{n \geq 1} l(\gamma_n)$ が成り立つことを示せ．

2) $n \geq 2$ とし，$1 \leq k \leq 2^{n-2}$ について $t_k = \dfrac{2k-1}{2^n}$ と置く．$f_n(t_k)$ は次のように計算できることを示せ．

   a) $a_1 = 2k-1$ と置く．$a_1 < 2^{n-1}$ ならば $b_1 = \dfrac{a_1}{2^n}$ とし，$2k-1 > 2^{n-1}$ ならば $b_1 = \dfrac{2^n - a_1}{2^n}$ とする．いずれの場合にも $a_1 = 2k-1$ を 2^{n-1} で割った余りを a_2 とする．

   ※ a_1 を 2^{n-1} で割った商が 0 ならば $b_1 = \dfrac{a_2}{2^n}$，1 ならば $b_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{a_2}{2^n}$ である．

   b) $a_2 < 2^{n-2}$ ならば $b_2 = \dfrac{a_2}{2^n}$ とし，$a_2 > 2^{n-2}$ ならば $b_2 = \dfrac{2^{n-1} - a_2}{2^n}$ とする．いずれの場合にも a_2 を 2^{n-2} で割った余りを a_3 とする．

   ※ a_2 を 2^{n-2} で割った商が 0 ならば $b_2 = \dfrac{a_3}{2^n}$，1 ならば $b_2 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{a_3}{2^n}$ である．

   c) 以下，同様に a_i, b_i を $i = 1, \ldots, n$ について定める．すると $f_n(t_k) = \sum_{i=1}^{n} b_i$ が成り立つ．

   d) $2k-1$ の二進展開と $f_n(t_k)$ の関係について調べよ．

   ※ ある程度系統的に表せるが，適当なところで妥協して場合分けをしてしまった方が取り敢えず簡単である．

3) $l(\gamma_n)$ を求めよ．また，$l(\gamma_{n+1}) > l(\gamma_n)$ が成り立つことを示せ．

4) $l(\gamma) = +\infty$ が成り立つことを示せ．

（以上）