２０１７年度微分積分学（理 I 24–27 組向け，足助担当）演習問題 14 v3　'17/9/25（月）
'17/11/2：問 14.2 の誤植を修正.
'17/11/13：一部混乱を招く記述があったようなので加筆．問題には手を加えていない.

極値，ヘシアンについて.

$a \in \mathbb{R}^n,\ r > 0$ について $B_a(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}$ と定める.

問 14.1. $U \subset \mathbb{R}^n$ とし，$f\colon U \to \mathbb{R}$ を全微分可能な函数とする．$a = (a_1, \ldots, a_n) \in U$ とし，$\exists r > 0,\ B_a(r) \subset U$ とする．また，f は a において極値を取るとする．このとき，$1 \leq i \leq n$ を固定し，$f_i(t) = f(a_1, \ldots, \overset{i}{\smile}{t}, \ldots, a_n)$ と置くと f_i は $t = a_i$ で極値を取ることを示せ.

問 14.2. 以下の函数について

i) 微分（全微分），ヘシアンを求めよ.
ii) 臨界点，極大点，極小点及び臨界値，極大値，極小値を全て求めよ.
iii) 必要に応じて計算機などを用いて臨界値に近い $c \in \mathbb{R}$ を幾つか選び，$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\}$ あるいは $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x, y, z) = c\}$ を作図せよ.

1) $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
2) $a \in \mathbb{R}$ とし，$f(x, y) = x^2 + ay^2$ とする.
3) $a, b \in \mathbb{R}$ とし，$g(x, y, z) = x^2 + ay^2 + bz^2$ とする.
4) $f(x, y) = (x^2 - 10y)(x^2 + y^2 - 2x)$
5) $a \in \mathbb{R}$ とし，$f(x, y) = x^2 - y^2(y - a)$ とする.

積分について.

問 14.3. 講義の記号をそのまま用いる．$v(P) = \displaystyle\sum_{1 \leq k \leq k(\Delta)} v(I_k)$ が成り立つことを示せ．ただし，$k(\Delta) = 0$ の場合は右辺の和は 0 と考える.

問 14.4. $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $f(x_1, \ldots, x_n) = 1$ により定める．$P = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ とすると $\displaystyle\int_P f(x)dx = v(P)$ が成り立つことを示せ．左辺をしばしば $\displaystyle\int_P dx$ で表す.

問 14.5. $U \subset \mathbb{R}^n$ とする．$f\colon U \to \mathbb{R}^m$ が一様連続であるならば f は U 上連続であることを示せ．

ここでは次の定理を認める．

定理. $K \subset \mathbb{R}^n$ をコンパクトとする．$\mathbb{R}^n$ の開集合の族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$（$\Lambda$ はどんな集合でも良い．例えば $\mathbb{N}$ でもよいし，$\mathbb{R}$ でもよい）について，$K \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \exists\lambda \in \Lambda,\ p \in U_\lambda\}$ が成り立つならば，Λ の有限部分集合（有限個の元から成る部分集合）Λ' が存在して $K \subset \bigcup_{\lambda'\in\Lambda'} U_{\lambda'}$ が成り立つ．

問 14.6 ***.** $K \subset \mathbb{R}^n,\ f\colon K \to \mathbb{R}$ を連続とする．K がコンパクトならば f は一様連続であることを示せ．

問 14.7. $K \subset \mathbb{R}^n,\ f\colon K \to \mathbb{R}$ を連続とする．K がコンパクトでないと f は必ずしも一様連続ではないことを例を挙げて示せ．

問 14.8. $P \subset \mathbb{R}^n$ を閉区間の直積，$f\colon P \to \mathbb{R}$ を可積分函数とする．$c \in \mathbb{R}^n$ とし，$P_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in P,\ x = y + c\}$ と置き，$f_c\colon P_c \to \mathbb{R}$ を $f_c(x) = f(x-c)$ により定めると P_c も閉区間の直積であって，f_c は P_c 上可積分であることを示せ．

問 14.9. $P \subset \mathbb{R}^n$ を閉区間の直積，$f, g\colon P \to \mathbb{R}$ を可積分函数とする．$fg(x) = f(x)g(x)$ により $fg\colon P \to \mathbb{R}$ を定める．

1) $v(P) = 0$ とすると fg は P 上可積分であること示せ．
2) $v(P) \neq 0$ とする．この時 f, g は有界であるから，ある $C \in \mathbb{R}$ が存在して P 上 $|f| \leq C, |g| \leq C$ が成り立つ．このことを用いて，$|fg(x) - fg(y)| \leq C(|f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)|$ が成り立つことを示せ．
3) fg は P 上可積分であること示せ．

（以上）