２０１７年度微分積分学（理Ｉ 24–27 組向け，足助担当）演習問題 １１ v1 2017/6/26（月）

問 11.1. $a \in \mathbb{R}$，$f\colon I \to \mathbb{R}$ とする．

1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ は $I \subset \mathbb{R}$ 上 $f = f(x)$ に一様収束するとする．$x \in I$ について $\displaystyle\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=0}^{m} a_n(x-a)^n = f(x)$ が成り立つことを示せ．

2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ が $I \subset \mathbb{R}$ 上 $f = f(x)$ に一様収束することと，条件

$$\forall\epsilon > 0\,\exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow \sup_{x\in I}\left|f(x) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n\right| < \epsilon$$

が成り立つことは同値であることを示せ．

問 11.2 (講義の例 2.1.2 も参照のこと)**.** $n \in \mathbb{Z},\ n > 1$ とする．$f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x, & 0 \leq x < \dfrac{1}{n}, \\ 2n - n^2x, & \dfrac{1}{n} \leq x < \dfrac{2}{n}, \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

により定める．また，$f = 0$（恒等的に 0 である函数）とする．このとき，$(f_n)_{n>1}$ は f に $\mathbb{R}$ 上各点収束するが，一様収束しないことを示せ．

問 11.3. $I \subset \mathbb{R}$ とし，$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を I 上の連続な函数列（連続な函数からなる函数列）とする．また，$f\colon I \to \mathbb{R}$ とし，$n \to +\infty$ で $(f_n)_{n\to+\infty}$ は I 上 f に一様収束するとする．この時，f は I 上連続であることを以下に従って示せ．$a \in I,\ \epsilon > 0$ とする．目標は

$$\exists\delta > 0,\ x \in I,\ |x-a| < \delta, \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

が成り立つことを示すことである．

1)

$$\exists n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |f(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{3}$$

が成り立つことを示せ．

2) 1) の n について，

$$\exists\delta > 0,\ x \in I,\ |x-a| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\epsilon}{3}$$

が成り立つことを示せ．

3) 2) の δ について，

$$x \in I,\ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \epsilon$$

が成り立つことを示せ．

ヒント：$f(x)-f(a) = (f(x)-f_n(x)) + (f_n(x)-f_n(a)) + (f_n(a)-f(a))$ が成り立つ．

問 11.4. 1) $s \in \mathbb{N},\ s > 0$ とする．$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n^s}$ は s によらず収束し，収束が絶対であることと $s \geq 2$ であることは同値であることを示せ．

2) $s \in \mathbb{R},\ s > 0$ とする．$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n^s}$ が収束することと $s \geq 1$ が成り立つことは同値であることを示せ．また，収束が絶対であることと $s > 1$ であることは同値であることを示せ．

問 11.5. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ により定める．

1) f は C^∞ 級であることを示せ．

2) f は C^ω 級であることを示せ．

3) f の $0 \in \mathbb{R}$ におけるテーラー展開は

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$$

で与えられることを示せ．4) の右辺は $x=1$ で収束しないことを示せ．また，$x=1$ における f のテーラー展開を求めよ．

問 11.6. 以下の函数の，$a \in \mathbb{R}^n$ におけるテーラー展開を求めよ（$a,\ n$ は個別に定める）．

1) $f(x) = e^x,\ a = 0 \in \mathbb{R}$

2) $f(x) = e^{\cos x},\ a = 0 \in \mathbb{R}$

3) $f(x) = \tan x,\ a = 0 \in \mathbb{R}$

4) $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_r x^r,\ a = b \in \mathbb{R}$

5) $f(x) = \arctan x,\ a = 0 \in \mathbb{R}$，ただし，$\arctan$ は $\arctan 0 = 0$ であるように定める．

6) $f(x,y) = e^{x+y},\ a = (0,0) \in \mathbb{R}^2$

（以上）