２０１７年度微分積分学（理 I 24–27 組向け，足助担当）演習問題 9 v1　2017/6/12（月）

問 9.1. $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線型写像とすると，f は C^∞ 級であることを示せ．

問 9.2. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

により定める．

1) f は C^∞ 級であることを示せ．
2) $a_0, a_1, \ldots \in \mathbb{R}$ が存在して，$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ が成り立つとする．より正確には，任意の $x \in \mathbb{R}$ について $\lim_{n \to +\infty} \sum_{m=0}^{n} a_m x^m$ が成り立つとする（ただし，$x \in \mathbb{R}$ について $x^0 = 1$ と定める）．このとき，$a_0 = a_1 = \cdots = 0$ が成り立つことを示せ．
3) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ は成り立たないことを示せ．また，I を 0 を含む開区間とすると $\forall x \in I,\ f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ は成り立たないことを示せ．

0 を含む開区間 I が存在して $\forall x \in I,\ f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ が成り立つ時，f は 0 においてテーラー展開可能であると言う．等号がどのような意味で成り立つか，といった詳しいことは後日扱う．ここでは C^∞ 級の函数でもテーラー展開可能とは限らない，ということを理解すれば良い．

問 9.3***.** 一変数函数についての逆函数定理（定理 4.4.5）をいわゆる ε–δ 論法を用いて示せ．また，最後の主張 $f(V) = (s,t)$ が成り立つことを示せ．さらに，実際には $s = f(p-\varepsilon)$, $t = f(p+\varepsilon)$ が成り立つことを示せ．

問 9.4. $f(x) = x^3 - x$ として，$p = 0$，$p = 1$，$p = -1$ の場合に逆函数定理がどのように成り立つか調べてみよ．また，$p = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ の時に定理の仮定がみたされず，結論も成り立たないことを確かめよ．

f が線型写像の場合には，逆函数定理や陰函数定理は理解しやすい．なお，問 9.5 と 9.6 は純粋に線型代数の問題である.「線型代数学」で行列のランクや次元について学んでから解けば良い．

問 9.5. $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線型写像とする．

1) f の表現行列を $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ とすると $Df = A$ が成り立つ（$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ Df(x) = A$ が成り立つ）ことを示せ．

2) f が線型同型写像であるならば $n = m$ が成り立つことを示せ．

3) $n = m$ であって，$\det Df \neq 0$ が成り立つならば，f は線型同型写像であることを示せ．

問 9.6. $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ を線型写像とする．二つある $\mathbb{R}^m$ を区別するため $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ の $\mathbb{R}^m$ を V，もう一方の $\mathbb{R}^m$ を W とする．また，$Df = (P_1\ P_2)$ と $P_1 \in M_{m,n}(\mathbb{R})$，$P_2 \in M_m(\mathbb{R})$ と区分けすると $P_2 \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ が成り立つとする．

1) $\mathbb{R}^n$ から $V = \mathbb{R}^m$ への線型写像 g が存在して $f(x, g(x)) = o \in \mathbb{R}^m$ が成り立つことを示せ．
   ヒント：f の表現行列を F，g の表現行列を G とするならば，$F = (P_1\ P_2)$，$F\begin{pmatrix} E_n \\ G \end{pmatrix} = O_{m,n}$ が成り立つ．

2) $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ について $f(x, y) = o$ が成り立つならば，1) の g について $y = g(x)$ が成り立つことを示せ．

（以上）