２０１７年度微分積分学（理I 24–27 組向け，足助担当）演習問題 8 v3　2017/6/5（月）
'17/6/4：定義 8.9 と問 8.10 を追加.
'17/6/6：問 8.7 の 1) の誤植を修正.

問に時々付けている「$*$」は難しかったりやや脱線気味であって，場合によっては外の問を優先して解いてもよいことを意味する.「$*$」の数が多ければ多いほどその度合いが高い.

問 8.1. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ を写像とする．f が $a \in \mathbb{R}$ において微分可能であることと，f が a において左右から微分可能であって，しかも左右の微分係数が一致することは同値であることを示せ．また，このとき，f の a における微分係数は，f の a における左右の微分係数と等しいことを示せ.

問 8.2. 1) $K = \mathbb{R}$ あるいは $K = \mathbb{C}$ とする．$\varphi\colon M_{m,n}(K) \to K^{mn}$ を，$A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ について

$$\varphi(A) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{mn}$$

により定める．$\varphi\colon M_{m,n}(K) \to K^{mn}$ は（K-）線型同型写像であることを示せ.

2) 1) で，成分の並べ方を外の並べ方に変えて，φ と同様に写像を定めてもやはり線型同型写像が得られることを示せ.

$M_{m,n}(K)$ を定義域や値域とする写像を考える際には，しばしばこのようにして $M_{m,n}(K)$ を K^{mn} とみなして議論を進める.

定義 8.3. $x_1, \ldots, x_n$ を変数とする．有限個の定数 $a_{r_1,\ldots,r_n}$ を用いて

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{r_1,\ldots,r_n} a_{r_1,\ldots,r_n} x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n}$$

と表すことのできる函数を（n 変数の）**多項式**と呼ぶ．変数や定数は実数であったり，複素数であったり，もっと一般の「数」であったりする.

問 8.4. 1) 変数や定数は実数とする．n 変数の多項式を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への写像とみなすと C^∞ 級であることを示せ.

2) 変数や定数は複素数とする．実部と虚部を分けて並べることにより $\mathbb{C}^n$ を $\mathbb{R}^{2n}$ とみなす．n 変数の多項式を $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ から $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ への写像とみなすと C^∞ 級であることを示せ．

問 8.5. 1) $\det\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ を行列式（を写像とみなしたもの）とする．$M_n(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}^{n^2}$ と同一視し，$\det\colon \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ とみなすと $\det$ は C^∞ 級であることを示せ．

2) $\det\colon M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ を行列式とする．$M_n(\mathbb{C})$ を $\mathbb{C}^{n^2}$ と同一視し，更に，$\mathbb{C}^{n^2}$ の元を実部と虚部に分けて並べることにより $\mathbb{C}^{n^2}$ を $\mathbb{R}^{2n^2}$ とみなす．値域の $\mathbb{C}$ も $\mathbb{R}^2$ とみなす．このとき，$\det\colon \mathbb{R}^{2n^2} \to \mathbb{R}^2$ は C^∞ 級であることを示せ．

問 8.6. $U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とし，$a \in U$ とする．また，$f\colon U \to M_n(\mathbb{R})$ は a において連続だとする．

1) $\det\circ f\colon U \to \mathbb{R}$ は a において連続であることを示せ．ここで $\det\circ f(x) = \det f(x)$ である．$\det\circ f$ は $\det f$ と略記することが多い．

2) $f(a) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ならば，$\delta > 0$ が存在して $x \in U,\ \|x-a\| < \delta \Rightarrow f(x) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ が成り立つことを示せ．

問 8.7. $U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とし，$a \in U$ とする．また，$f\colon U \to M_n(\mathbb{R})$ とし，f は a において微分可能だとする．

1) $\det f\colon U \to \mathbb{R}$ は a において微分可能であることを示せ．

2) $f(a) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ とする．このとき，$\delta > 0$ が存在して，$V = \{x \in U \mid \|x-a\| < \delta\}$ とおくと $x \in V$ について $f(x) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ であって，V 上で

$$\frac{d}{dx}f(x)^{-1} = -f(x)^{-1}\frac{df}{dx}(x)f(x)^{-1}$$

が成り立つことを示せ．

ヒント：2) の前半は問 8.6 そのものである．後半は $f(x)f(x)^{-1} = E_n$ の両辺を微分してみよ．

問 8.8. $a < b$ とし，$f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ は微分可能であるとする．ただし，$a = -\infty$ あるいは $b = +\infty$ の場合も許すことにする．このとき，以下が成り立つことを示せ．

1) $\forall x \in (a,b),\ Df(x) \geq 0$ であれば f は (a,b) で単調増加である．

2) $\forall x \in (a,b),\ Df(x) > 0$ であれば f は (a,b) で狭義単調増加である．

3) $\forall x \in (a,b),\ Df(x) = 0$ であれば f は (a,b) で定数である．

注意：f は $[a,b]$ 上で定まっているとは限らないので，講義における命題 4.2.4 を用いるのであれば工夫が要る．

定義 8.9 (復習)**.** $U \subset \mathbb{R}^n$ が開集合であるとは，条件

$$\forall p \in U,\ \exists \delta > 0,\ x \in \mathbb{R}^n,\ \|x - a\| < \delta \Rightarrow x \in U$$

が成り立つことを言う．

問 8.10***.** $U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合，$f\colon U \to \mathbb{R}$ は連続だとする．$V = \{x \in U \mid f(x) \neq 0\}$ とすると V は開集合であることを示せ．

ヒント：$a \in V$ とする．$\delta > 0$ が存在して $x \in U,\ \|x - a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \dfrac{|f(a)|}{2}$ が成り立つ．最後の式を少し変形して $|f(x)|$ に関する式に書き換え，V が開集合であることの定義と比べてみよ．

（以上）