２０１６年度線型代数学（理Ｉ6,7,9,10 組向け，足助担当）　演習問題 13　2016/11/11（金）

定義 13.1. $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ の線型変換 f が $\forall v, w \in V,\ \langle v \mid f(w) \rangle = \langle f^*(v) \mid w \rangle$ をみたすとき f を**対称変換**（$K = \mathbb{R}$ の場合）あるいは**エルミート変換**（$K = \mathbb{C}$ の場合）と呼ぶ.

問 13.2. $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ を複素計量線型空間とする．f がエルミート変換であるならば，f の固有値は実数であることを示せ.

ヒント：$f(v) = \lambda v,\ v \neq o$ として $\langle v \mid f(v) \rangle$ を考えてみよ．なお，f が実線型空間の線型変換であっても,「f の複素数の範囲での固有値，固有ベクトル」は適切に定義できる（全く一般の実線型空間について考えようとするとこの講義の範囲を超えるが，例えば $\mathbb{R}^n$ や $\mathbb{R}[x]$ の場合には安直に考えれば良い．問 13.3 を参照のこと）．これを用いれば V が実計量線型空間であって，f が対称変換である場合には f の固有値は複素数の範囲で考えても実数であることが示せる（このことの証明は易しい）.

問 13.3.

1) $A \in M_n(\mathbb{R})$ とする．$\mathbb{R}^n$ の線型変換 f を $v \in \mathbb{R}$ について $f(v) = Av$ と置くことにより定める．また，$\mathbb{C}^n$ の線型変換 $f_{\mathbb{C}}$ を $w \in \mathbb{C}$ について $f_{\mathbb{C}}(w) = Aw$ と置くことにより定める．$\iota\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^n$ を包含写像とすると $f_{\mathbb{C}} \circ \iota = \iota \circ f$ が成り立つことを示せ．また，f が $\mathbb{C}$ 上対角化可能であることと，$f_{\mathbb{C}}$ が（$\mathbb{C}$ 上）対角化可能であることは同値であることを示せ.
2) $\mathbb{R}[x]$ の線型変換 φ を $f \in \mathbb{R}[x]$ について $\varphi(f) = \dfrac{df}{dx} + f$ と置くことにより定める．また，$\mathbb{C}[x]$ の線型変換 $\varphi_{\mathbb{C}}$ を $g \in \mathbb{C}$ について $\varphi_{\mathbb{C}}(g) = \dfrac{dg}{dx} + g$ と置くことにより定める．ここで，複素係数の多項式の微分は実係数の多項式の微分と同様に，$g(x) = ax^n$ であれば $\dfrac{dg}{dx} = nax^{n-1}$ であるとして定める．$\iota\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{C}[x]$ を包含写像とすると $\varphi_{\mathbb{C}} \circ \iota = \iota \circ \varphi$ が成り立つことを示せ．また，$\lambda \in \mathbb{R}$ と $f \in \mathbb{R}[x]$ について $\varphi(f) = \lambda f$ が成り立つならば，f を自然に $\mathbb{C}[x]$ の元とみなす（$\iota(f)$ を改めて f で表す）と，$\varphi_{\mathbb{C}}(f) = \lambda f$ が成り立つことを示せ.

問 13.4. $A \in M_n(K)$ を対称行列（$K = \mathbb{R}$）あるいはエルミート行列（$K = \mathbb{C}$）とする．K^n の線型変換 f を $f(v) = Av$ により定めると，標準的な計量に関して f は対称変換あるいはエルミート変換であることを示せ.

問 13.5. $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ を計量線型空間とする．以下の条件は同値であることを示せ.

1) f は対称変換（$K = \mathbb{R}$ の場合）あるいはエルミート変換（$K = \mathbb{C}$ の場合，以下同様））である.
2) V のある正規直交基底に関する f の表現行列は対称行列あるいはエルミート行列である.
3) V の任意の正規直交基底に関する f の表現行列は対称行列あるいはエルミート行列である.

問 13.6. $A \in M_n(K)$ とし，A の相異なる固有値全体を $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$，$\lambda_k$ の重複度を α_k とする（$1 \leq k \leq r$）．このとき，A^* の相異なる固有値全体は $\overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_r}$ であって，$\overline{\lambda_k}$ の重複度は α_k である（$1 \leq k \leq r$）ことを示せ．
ヒント：例えば SO_n の元あるいは SU_n の元による三角化を考えると良い．

定義 13.7. V が K-線型空間であるとき，

$$V^* = \{f\colon V \to K \mid f \text{ は } K\text{-線型写像}\}$$

と置いて V の**双対空間**（そうつい）と呼ぶ．V^* を $V^\vee$ で表すこともある．

問 13.8. V^* は写像の和，定数倍に関して K-線型空間であることを確かめよ．

問 13.9 **(難しければ $V = K^n$ として考えよ)．g を V 上の対称双線型形式あるいは対称半双線型形式とする[1]．$\varphi\colon V \to V^*$ を，

$$\varphi(v)(w) = g(v, w)$$

により定める．

1) 実際に $\varphi(v) \in V^*$ であることを確かめよ．
2) $K = \mathbb{R}$ であれば φ は線型であって，$K = \mathbb{C}$ であれば φ は共役線型であることを示せ．
3) g が非退化であることと，φ が
   a) $K = \mathbb{R}$ であれば線型同型写像であること
   b) $K = \mathbb{C}$ であれば共役線型同型写像（共役線型であって，かつ全単射）であること

   は同値であることを示せ．

問 13.10 (問 12.10 の続き．線型代数からはやや逸脱する)．

$$\begin{aligned}
G &= \{f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid \forall p, q \in \mathbb{R}^n,\ d(f(p), f(q)) = d(p, q)\}, \\
K &= \{f \in G \mid f(o) = o\}, \\
H &= \{f \in G \mid \exists b \in \mathbb{R}^n,\ f(v) = v + b\}
\end{aligned}$$

と定める．

1) $f, g \in G$ とすると $g \circ f \in G$ が成り立つことを示せ．また，f^{-1} が定まり，$f^{-1} \in G$ が成り立つことを示せ．
2) 1) で G の代わりに K や H を考えても同様のことが成り立つことを示せ．
3) $h \in H$ とする．$k \in K$ とすると $k^{-1} \circ h \circ k \in H$ が成り立つことを示せ．
4) $f \in G$ とする．$h \in H,\ k \in K$ が一意的に存在して $f = h \circ k$ が成り立つことを示せ．また，$h' \in H,\ k' \in K$ が一意的に存在して $f = k \circ h$ が成り立つことを示せ．

（以上）

[1] V は有限次元とする．無限次元の場合は理論的にも応用的にも大事であるが，難しすぎてまだ述べられない．