２０１６年度線型代数学（理 I 6,7,9,10 組向け，足助担当）　演習問題 １２　2016/11/4（金）

問 12.1.

$$C_c^\infty(\mathbb{R}) = \left\{ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ は } C^\infty \text{ 級であって，ある } M \geq 0 \text{ が存在して} \\ |t| \geq M \text{ ならば } f(t) = 0 \text{ が成り立つ} \end{array} \right\}$$

と置く．

1) $C_c^\infty(\mathbb{R})$ は函数の和と定数倍により線型空間であることを示せ．
   $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ごとに M は（一般には）異なることに注意せよ．
2) $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ について $\langle f \mid g \rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)dt$ と置くと，$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ は $C_c^\infty(\mathbb{R})$ のユークリッド計量であることを示せ．

問 12.2. S^1 を $\mathbb{R}^2$ 内の，原点を中心とする半径 1 の円周とする．

1) $f\colon S^1 \to \mathbb{R}$ について，$\widetilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $\widetilde{f}(\theta) = f(\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta)$ により定める．$g\colon S^1 \to \mathbb{R}$ について $\widetilde{g}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を同様に定めると，$f = g$ が成り立つことと $\widetilde{f} = \widetilde{g}$ が成り立つことは同値であることを示せ．また，$\widetilde{f}$ は $\widetilde{f}(t+1) = \widetilde{f}(t)$ をみたすことを示せ（このような函数を**周期函数**と呼ぶ）．
2) $\widetilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $\widetilde{f}(t+1) = \widetilde{f}(t)$ をみたすとする．$f\colon S^1 \to \mathbb{R}$ を次のように定める．$p \in S^1$ とし，$p = (\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta)$ と表わす（θ の選び方は一意的ではないが，一つ選ぶ）．そして $f(p) = \widetilde{f}(\theta)$ と定める．f はきちんと定まっている（well-defined である，という）ことを示せ．つまり，$f(p)$ は θ の選び方によらず定まることを示せ．

問 12.3.

$$C^\infty(S^1) = \left\{ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ は } C^\infty \text{ 級であって，} f(t+1) = f(t) \\ \text{が任意の } t \in \mathbb{R} \text{ について成り立つ} \end{array} \right\}$$

と置く．

1) $C^\infty(S^1)$ は函数の和と定数倍により線型空間であることを示せ．
2) $f, g \in C^\infty(S^1)$ について $\langle f \mid g \rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt$ と置くと，$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ は $C^\infty(S^1)$ のユークリッド計量であることを示せ．

問 12.4 (問 12.3 の続き)**.** $n \in \mathbb{N},\ n > 0$ について $\varphi_n, \psi_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$\varphi_n(t) = \cos 2n\pi t,$$

$$\psi_n(t) = \sin 2n\pi t$$

により定める．また，$\varphi_0(t) = 1$（恒等的に 1 であるような函数）とする．ψ_0 も記号上現れることがあるが，これは無視することにする．

1) $\varphi_n, \psi_n \in C^\infty(S^1)$ が成り立つことを確かめよ．

2) $\langle \varphi_n \mid \varphi_m \rangle = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & n = m, \\ 0, & n \neq m, \end{cases}$ $\langle \psi_n \mid \psi_m \rangle = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & n = m, \\ 0, & n \neq m \end{cases}$ および $\langle \varphi_n \mid \psi_m \rangle = 0$ が成り立つことを示せ．

3) 任意の M について，$\{\varphi_n, \psi_n\}_{0 \leq n \leq M}$ は $\mathbb{R}$ 上線型独立であることを示せ．即ち，任意の $a_k, b_k,\ 1 \leq k \leq M$ と a_0 について

$$a_0\varphi_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k + \sum_{k=1}^{n} b_k\psi_k = 0$$

が成り立つ（函数として 0 に等しい）ならば $a_0 = a_1 = \cdots = a_M = b_1 = \cdots = b_M = 0$ が成り立つことを示せ．このことを，$\{\varphi_n, \psi_n\}$ は $\mathbb{R}$ 上線型独立であると言う．

以下では V は有限次元の計量線型空間とする．

問 12.5. V の恒等変換は等長変換であることを示せ．

問 12.6. f, g を V の等長変換とする．$g \circ f$，f^{-1} は V の等長変換であることを示せ．

問 12.7. f を V の等長変換とする．$v, w \in V$ とすると，$f(v), f(w)$ のなす角は v, w のなす角に等しいことを示せ（$2\pi\mathbb{Z}$ や符号の不定性は除く）．また，$\|f(v)\| = \|v\|$ が成り立つことを示せ．

問 12.8. f が V の等長変換であることと，$f^* = f^{-1}$ が成り立つことは同値であることを示せ．

問 12.9. $\|\cdot\|$ を $\mathbb{R}^n$ の標準的なユークリッド計量から定まるノルムとし，$p, q \in \mathbb{R}^n$ について，$d(p, q) = \|p - q\|$ と定める．

1) $p, q \in \mathbb{R}^n$ について $d(p, q) = d(q, p)$ が成り立つことを示せ．

2) $p, q, r \in \mathbb{R}^n$ について $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$ が成り立つことを示せ．また，等号が成り立つための条件を求めよ．

3) $p, q \in \mathbb{R}^n$ について $d(p, q) = 0 \iff p = q$ が成り立つことを示せ．

問 12.10. $d(\,\cdot\,, \cdot\,)$ を問 12.9 のように定める．$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ とし，任意の $p, q \in \mathbb{R}^n$ について $d(f(p), f(q)) = d(p, q)$ が成り立つとする．

1) $f(o) = o$ が成り立つとする．

   a) $\forall v \in \mathbb{R}^n,\ \|f(v)\| = \|v\|$ が成り立つことを示せ．

   b) $\forall v, w \in \mathbb{R}^n,\ \langle f(v) \mid f(w) \rangle = \langle v \mid w \rangle$ が成り立つことを示せ．

   c) f は線型であることを示せ．

   ヒント：$\|f(\lambda p + \mu q) - \lambda f(p) - \mu f(q)\|^2$ を計算してみよ．

   d) $A \in \mathrm{O}_n$ が一意的に存在して $\forall p \in \mathbb{R}^n,\ f(p) = Ap$ が成り立つことを示せ．

2) 一般には，$A \in \mathrm{O}_n$ と $b \in \mathbb{R}^n$ が一意的に存在して $\forall p \in \mathbb{R}^n,\ f(p) = Ap + b$ が成り立つことを示せ．

（以上）