問 5.21 (再掲). ここでは問 5.15 にある定理の 2) を示す．1) は既に示してあるので，これを用いる．

1) $B = {}^t\!A$ と置く．B に 1) を用いることにより，ある $Q \in \mathrm{GL}_n(K)$ が存在して AQ は列階段行列であることを示せ．
   ヒント：$Q \in \mathrm{GL}_n(K)$ ならば ${}^tQ \in \mathrm{GL}_n(K)$ が成り立つのであった．
2) $Q, Q \in \mathrm{GL}_n(K)$ について AQ, AQ' が共に列階段行列であるとする．${}^t\!AQ, {}^t\!AQ'$ を考えることにより，得られる列階段行列は一意的であることを示せ．
3) $\mathrm{rank}\,{}^t\!A = \mathrm{rank}\,A$ が成り立つことに注意して，AQ が列階段行列であるならば，0 でない列の数は $\mathrm{rank}\,A$ に等しいことを示せ．

問 6.1. $A \in M_n(K)$ とする．このとき，ある $N \in \mathbb{N},\ N \leq n^2$ と，$a_0, \ldots, a_{N-1} \in K$ が存在して

$$A^N + a_{N-1}A^{N-1} + \cdots + a_1A + a_0E_n = O_n$$

が成り立つことを示せ．
ヒント：$M_n(K)$ の元の組 $\{E_n, A, A^2, \ldots, A^r\}$ が，r を増やしていったとき，いつまで線型独立でいられるか考えてみよ．なお，N は一般に $n(\leq n^2)$ 以下に取ることができる（n 未満に取れないこともある．従って一般にはこれ以上小さい値にはできない）．これについては後日述べる．

問 6.2. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とし，K^2 の線型変換 f を $f(v) = Av$ により定める．また，$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ と置く．

1) Av_1, Av_2 を求めよ．
2) $\lambda \in K$ とする．$v \in K^2$ に関する方程式 $Av = \lambda v$ が o でない解を持つための必要十分条件は $\det(\lambda E_2 - A) = 0$ が成り立つことであることを示せ．また，この条件が成り立つ λ を全て求めよ．
3) 2) で求めた λ のそれぞれについて，解空間 $\{v \in K^2 \mid Av = \lambda v\}$ を決定せよ．
4) $P = (v_1\ v_2) \in M_2(K)$ と置くと P は正則であることを示せ．
5) P^{-1} 及び $P^{-1}AP$ を求めよ．
6) $\mathscr{V} = (v_1, v_2)$ を K^2 の順序付き基底とみなす．$\mathscr{V}$ に関する f の表現行列を求めよ．

問 6.3. $A \in M_n(K)$ について，ランクと行列式，また正則であれば逆行列を求めたいとする．このとき，例えば以下のような作業をすればよいことを確かめよ．

1) $A' = (A \mid E_n)$ と，A と E_n を並べて $M_{n,2n}(K)$ の元を作る（縦線は区分けを示すために入れた）．

2) A' のうち，A の部分を（行）階段行列に左基本変形で変形する．基本変形に対応する行列を $P_1, \dots, P_r$ とし，$P = P_r P_{r-1} \cdots P_1$ とすると（順序に注意），得られる行列は $PA' = (PA \mid P)$ である．PA は階段行列なので，L とすれば $PA' = (L \mid P)$ である．

3) L は階段行列なのだから，o でない行の数を数えれば $\operatorname{rank} A$ が求まる．

4) $\operatorname{rank} A < n$ とする．この場合には逆行列は存在しない．また，$\det L = \det P \det A$ であるが，$\det L = 0$ なので（何故か？）$\det A = (\det P)^{-1}(\det L) = 0$ が成り立つ．

5) $\operatorname{rank} A = n$ とする．この場合には A は正則であって，$P = A^{-1}$ である．また，$L = E_n$ が成り立つ．$P_1, \dots, P_r$ のうち，$P_n(i;\lambda)$ の形をしている物を $P_{r_1}, \dots, P_{r_k}$ とし，$P_{r_l} = P_n(i_l;\lambda_l)$ とする．このとき，$\det A = \dfrac{1}{\lambda_{r_1} \cdots \lambda_{r_k}}$ が成り立つ．

従って，2) で基本変形を行う際，どこかの行を何倍かする作業が現れたら，何倍したか覚えておいて，それらを全て掛けておく．行列が正則であれば，逆数が行列式である．

問 6.4. 次の行列について，ランクと行列式を求めよ．また，正則なものについては逆行列を求めよ．

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

ヒント：2) について行列式が 0 でなかったり，3) について行列式が 0 になった場合は恐らく根本的な（致命的な）考え違いをしている．また，逆行列は実際には計算していないので，計算結果は綺麗ではないかも知れない．

問 6.5. $n > 1$ とし，$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & & \\ & 0 & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$ と置く．A は**コンパニオン行列**と呼ばれ，微分方程式や漸化式を解く際などによく現れる（数理科学基礎でもごく簡単に述べた）．

1) $\det(\lambda E_n - A)$ を求めよ．

2) $\lambda \in K$ とし，$V_\lambda = \{v \in K^n \mid Av = \lambda v\}$ と置く．$\dim V_\lambda \leq 1$ が成り立つことを示せ．また，$\dim V_\lambda = 1$ が成り立つことと，$\det(\lambda E_n - A) = 0$ が成り立つことは同値であることを示せ．

問 6.6. $n>1$ とする．

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i<j}(x_j - x_i)$$

が成り立つことを示せ．ただし，右辺は $x_i - x_j$ を，$i<j$ なる (i,j) について全て考えてこれらの積を取ることを意味する[1]．この行列式を**ヴァンデルモンド（van der Monde）**の行列式と呼ぶ．また，右辺を $x_1,\dots,x_n$ の**差積**と呼ぶ．

問 6.7. $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする．

1) A の成分が全て整数（有理数，実数，複素数）であるならば，$\det A$ は整数（有理数，実数，複素数）であることを示せ．
2) A の成分が全て自然数であっても，$\det A$ は自然数とは限らないことを示せ．
   ヒント：この種の命題に対する不十分ないし，まったく無意味な「証明」を一つ挙げる．話を簡単にするために $n=2$ とする．「$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする．$\det A = ad-bc$ だから，a,b,c,d が全て自然数であっても $\det A<0$ となり得る．よって主張が成り立つ.」これでは実際にはほとんど何も示せていない．つまり,「証明」中で一番非自明（ 大事）なことは「a,b,c,d が全て自然数であっても $\det A<0$ となり得る」ことである．ひょっとしたら何か特別な理由で，やはり $ad-bc \geq 0$ が常に成り立つかも知れない（すると，$a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ であることから $ad-bc \in \mathbb{Z}$ が成り立つので $\det A$ は自然数である）．このことが論理的に排除されていないので，上に述べた「証明」は証明になっていない．ではどうすれば良いかと言えば，例えば例を挙げればよい．外にも理屈で示す方法はあるが，この主張に比べて遙かに難しい（非自明な）定理などを用いることになり，不適切である．
3) $\mathbb{Q}(\sqrt{-1}) = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists a,b \in \mathbb{Q},\ z = a+\sqrt{-1}b\}$ と置く[2]．A の成分が全て $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ の元ならば，$\det A \in \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ が成り立つことを示せ．
   ヒント：$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ が $\mathbb{Z}$ を含むことと，乗法と加法に関して閉じていることを示すのが簡単である．

問 6.8. $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ とする．

1) A の成分は全て有理数（$\mathbb{Q}$ の元）であるとする．このとき，A^{-1} の成分も全て有理数であることを示せ．

[1] 積は product なので ‘p’ に対応するギリシア文字 Π を用いている．ちなみに，和は sum なので，‘s’ に対応するギリシア文字 Σ を用いる．

[2] $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ を**ガウス数体**と呼ぶ．この問では必ずしも必要ではないが $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ は**体**である．例えば講義では $K=\mathbb{R}$ あるいは $K=\mathbb{C}$ としているが，$K=\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ としても多くのことが全く同じ形で成り立つ（例外はあるので注意は必要である）．

2) Aの成分は全て整数（$\mathbb{Z}$の元）であるとする．A^{-1}の成分も全て整数であるならば$\det A = 1$あるいは$\det A = -1$が成り立つことを示せ．

3) 2) のが逆が成り立つことを示せ．即ち，Aの成分が全て整数であって，$|\det A| = 1$ならばA^{-1}の成分は全て整数であることを以下の方針で示せ．

   a) 基本的には問 6.3 の作業を行うが，少し工夫する．まず$(A \,|\, E_n)$を基本変形する際，整数しか用いない（割り算はしない）で行う．$A \in \mathrm{GL}_n(K)$ならば，対角行列$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}$，$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$が存在して$(A \,|\, E_n)$を$(B \,|\, P)$の形に変形できることを示せ．

   b) $(B \,|\, P)$の第 1 行をα_1で，第 2 行をα_2で，$\cdots$，第n行をα_nで割れば$(E_n \,|\, P')$が得られ，$P' = A^{-1}$が成り立つ．このことを踏まえて，$\det A = \alpha_1 \cdots \alpha_n$であることを示せ．

   c) $|\det A| = 1$ならばA^{-1}の成分は全て整数であることを示せ．

問 6.9. $\dim V = n$とし，fをVの線型変換とする．$\mathscr{V}$をVの（任意の）基底とし，Aをfの$\mathscr{V}$に関する表現行列とする．このとき，$\operatorname{tr} A, \det A$は$\mathscr{V}$の選び方によらないことを示せ．$\operatorname{tr} A, \det A$をそれぞれ$f$の**トレース**，**デターミナント**と呼び$\operatorname{tr} f, \det f$で表す．

注 6.10. $\det f$は$\det A$に合わせて「行列式」と呼んだ方が良いのかも知れないが，$\det f$は行列には関係ないのでここでは避けた.「デターミナント」は ‘determinant’（行列式）の近似的な音読である．なお，‘determinant’ には行列（matrix）の意味は一切含まれない．敢えて直訳すれば「決定式」「決定子」位である．

問 6.11. fをK^nの線型変換とする．また，$e_1, \dots, e_n$をK^nの基本ベクトルとする．

1) 線型写像$e_i^* \colon K^n \to K$を条件$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$により定める（基底をなす元の像を定めれば，線型写像が一意的に定まるのであった）．すると

$$\operatorname{tr} f = \sum_{k=1}^{n} e_k^*(\operatorname{tr} f(e_k)) = e_1^*(f(e_1)) + \cdots + e_n^*(f(e_n))$$

   が成り立つことを示せ．

2) $\det f = \det(f(e_1) \ f(e_2) \ \cdots \ f(e_n))$が成り立つことを示せ．

行列式やトレースは行列・線型写像の固有値と関連が深い．ここでは一例を挙げるに留め，基本的には A セメスターで扱う．

問 6.12. $A \in M_n(K)$ とする．$\exists v \in K^n,\ v \neq o,\ Av = o$ が成り立つ[3]ことと，$\det A = 0$ が成り立つことは同値であることを示せ．
ヒント：問 6.1 の 2) と同じことである．

問 6.13. 1) $A \in M_2(K)$ とする．$\det A = \dfrac{1}{2}((\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr} A^2)$ が成り立つことを示せ．

2*) $A \in M_3(K)$ とする．$\det A = \dfrac{1}{6}(\operatorname{tr} A)^3 - \dfrac{1}{2}(\operatorname{tr} A)(\operatorname{tr} A^2) + \dfrac{1}{3}\operatorname{tr} A^3$ が成り立つことを示せ．
※ 特に仕掛けはないので単純に計算すれば良い．これらの式は $M_n(K),\ n > 3$ の場合にも一般化することができて，行列の冪乗を許すことにすると，行列式はトレースにより得られる（例えば固有値を用いて示すことができる）．この意味でトレースの方が行列式より基本的である．

定義 6.14. $K = \mathbb{R}$ あるいは $K = \mathbb{C}$ とする．$A \in M_{m,n}(K)$ とし，A の (i,j)-成分を a_{ij} とする．$\bar{A} \in M_{m,n}(K)$ を，(i,j)-成分が $\overline{a_{ij}}$ であるような行列とし，A の**複素共軛**（複素共役）と呼ぶ．

$A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ならば $\bar{A} = A$ が成り立つ．

定義 6.15. 1) $K = \mathbb{R}$ あるいは $K = \mathbb{C}$ とする．$A \in M_{m,n}(K)$ について $A^* = \overline{{}^t\!A} = {}^t\!\bar{A} \in M_{n,m}(K)$ と置き，A の**随伴行列**と呼ぶ．随伴行列は $A^\dagger$ 等で表すこともある．

2) $A, B \in M_{m,n}(K)$ について，$\langle A \,|\, B \rangle = \operatorname{tr} \overline{{}^t\!A} B = \operatorname{tr} A^* B$ と定める．

問 6.16. $A \in M_{m,n}(K)$ について $\langle A \,|\, A \rangle \geq 0$ が成り立つことを示せ．これを踏まえて $\|A\| = \sqrt{\langle A \,|\, A \rangle}$ と定める．

問 6.17. 1) $K = \mathbb{R}$ とする．$\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ は $M_{m,n}(\mathbb{R})$ の内積であることを示せ．

2*) $K = \mathbb{C}$ とする．$\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ は $M_{m,n}(\mathbb{C})$ のエルミート内積であることを示せ．
※ エルミート内積についてまだ扱っていないので $*$ を付けたが，特に難しいというわけではない．

ここでは次を認める．これについては A セメスターで扱う．

定理 (Schwarz の不等式). $v, w \in K^n$ について $|\langle v \,|\, w \rangle| \leq \|v\|\,\|w\|$ が成り立つ．

問 6.18. $A, B \in M_n(K)$ とする．$\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$ が成り立つことを示せ．
ヒント：Schwarz の不等式を用いるのが簡単である．

問 6.19. $A \in M_n(K)$ とする．$\det A$ は A の成分に関する多項式であることを示せ．
※ 具体的にどのような多項式であるのかは A セメスターで扱う．多項式であることだけなら定義を用いて帰納的に示すことは容易である．

[3] この条件は A が 0 を固有値に持ち，v は固有値 0 に属する A の固有ベクトルであることを意味する．この時には $Av = o$ の右辺は $0v$ とみなしている．

問 6.20. 1) $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ とする．

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0,\ B \in M_n(K),\ \|A - B\| < \delta \Longrightarrow B \in \mathrm{GL}_n(K)$$

が成り立つことを示せ．即ち，正則行列に「近い」行列は正則である．

2) $A \in M_n(K)$ とする．

$$\forall \epsilon > 0, \exists B \in \mathrm{GL}_n(K),\ \|A - B\| < \epsilon$$

が成り立つことを示せ．即ち，任意の行列について，それにいくらでも「近い」正則行列が存在する．

（以上）