２０１５年度数理科学基礎 I（理 I 32〜35 組向け，足助担当）　演習問題 2　2015/4/27（月）

'15/4/28：問 2.8，注 2.26 の誤植を修正.

'15/5/22：「$*$」のついている部分について体裁の変更.

'15/6/2：問 2.13 を修正.

この演習はおおよそ第 5 回の講義に対応する.

**問 2.1.** $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ とする．$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$ が成り立つことを示せ.

**問 2.2.** $A \subset \mathbb{R},\ a \in A$ とする．$x \to a$ のとき $f(x) \to b$ が成り立つとは

$$(*)\qquad \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ (x \in A,\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon)$$

が成り立つことを言うのであった.

1) 条件 $(*)$ は以下のいずれの条件とも同値であることを示せ.

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ (x \in A,\ 0 < |x-a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon)$$

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ (x \in A,\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| \leq \epsilon)$$

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ (x \in A,\ 0 < |x-a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - b| \leq \epsilon)$$

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ (x \in A,\ 0 < |x-a| < 2\delta \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon)$$

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ (x \in A,\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < 3\epsilon)$$

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ (x \in A,\ 0 < |x-a| < 2\delta \Rightarrow |f(x) - b| < 3\epsilon)$$

最後の三つに関して,「$2, 3$」は正数であれば何でも良い.

2) 条件 $(*)$ は以下のいずれの条件とも同値ではないことを示せ.

$$\forall \epsilon \geq 0,\ \exists \delta > 0,\ (x \in A,\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon)$$

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta \geq 0,\ (x \in A,\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon)$$

このように,「$>$」を「$\geq$」に取り替えて良い所と悪い所がある．なお，$x \to +\infty$ 等の場合にも類似のことが成り立つ.

**問 2.3.** 数列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が $n \to +\infty$ の時 $a$ に収束するとは

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ (n \in \mathbb{N},\ n > N \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon)$$

が成り立つことであった．この条件は

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ (n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon)$$

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ (n \in \mathbb{N},\ n > N \Rightarrow |a_n - a| \leq \epsilon)$$

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ (n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |a_n - a| \leq \epsilon)$$

のいずれの条件とも同値であることを示せ.

**問 2.4.** $a, b \in \mathbb{R}$ とする.

1) $a = b$ であることと，$\forall \epsilon > 0,\ |a - b| < \epsilon$ が成り立つことは同値であることを示せ.
2) $a \leq b$ であることと，$\forall \epsilon > 0,\ a < b + \epsilon$ が成り立つことは同値であることを示せ．また，$a \geq b$ であることと，$\forall \epsilon > 0,\ a > b - \epsilon$ が成り立つことは同値であることを示せ.
3) $a \leq b$ であることと，$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ a + \delta < b + \epsilon$ が成り立つことは同値であることを示せ．また，$a \geq b$ である場合に類似の命題を定式化して（具体的に書き下して）それを示せ.

**問 2.5.** $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

により定める．$f$ は $\mathbb{R}$ 上連続であることを示せ.

**問 2.6.** $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とする.「$f$ が $a \in \mathbb{R}$ において連続でない」ことを，否定の記号を用いずに $\epsilon$–$\delta$ 論法の「お作法」に従って表せ.

**定義 2.7.** $r > 0$ とする．$x \in \mathbb{R},\ x > 0$ について $x^r = e^{r \log x}$ と定める.

**問 2.8.** $r > 0$ とする．$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を正数列（正数からなる列）であって $\lim_{n\to+\infty} a_n = r$ が成り立つとする．このとき $\lim_{n\to+\infty} x^{a_n} = x^r$ が成り立つことを示せ.

**問 2.9.** 1) $r > 0$ とする．$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^r}{e^x} = 0$ が成り立つことを示せ．また，$\lim_{x\to-\infty} e^x |x|^r = 0$ が成り立つことを示せ[†1)].

[†1)] $r \in \mathbb{Z},\ r > 0$ ならば絶対値の記号は外しても同じ結論が成り立つ．確かめよ.

2) $f$ を $x$ に関する多項式とする．$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{e^x}=0$ が成り立つことを示せ．また，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}e^xf(x)=0$ が成り立つことを示せ．つまり，指数函数は $x\to+\infty$ の時，どんな多項式よりも（比の意味で）速く値が大きくなるし，$x\to-\infty$ の時，どんな多項式よりも（比の意味で）速く小さくなる[†2)]．

3) $f$ を $x$ に関する多項式とし，恒等的に $0$ ではないとする．また，$f$ の最高次の項の係数は正であるとする．このとき，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ が成り立つことを示せ．また，$\deg f$ が偶数であれば $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$，奇数であれば $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ が成り立つことを示せ．
ヒント：$f$ を最高次の項と，その他の項に分割してみよ．ちなみに，この考え方は代数学の基本定理を示すのにも使える．

4) $r>0$ とする．$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^r}=0$ が成り立つことを示せ．また，$\displaystyle\lim_{x\to0+0}x^r\log x=0$ が成り立つことを示せ．
※ $\log x$ は $x>0$ でしか定義されない[†3)]ので，$\displaystyle\lim_{x\to0+0}x^r\log x$ を単に $\displaystyle\lim_{x\to0}x^r\log x$ と表しても良い．

**定義 2.10.** $A\subset\mathbb{R}^n$ とし，$a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $A$ の**点列**とする[†4)]．即ち，各 $n\in\mathbb{N}$ について $a_n\in A$ が定まっているとする．$A$ の点列 $b=(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $a$ の**部分列**（部分点列）であるとは，$\mathbb{N}$ のある点列 $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して，

1) $n<n'\Rightarrow m_n<m_{n'}$
2) $b_n=a_{m_n}$

が成り立つことを言う．つまり，$b$ が $a$ を適当に「抜き書き」して得られる（有向）点列であることを言う．

**定義 2.11.** $A\subset\mathbb{R}^n$ とし，$a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $A$ の**点列**とする．$p\in\mathbb{R}^n$ が $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の**集積点**であるとは，$a$ のある部分列 $b=(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}b_n=p$ が成り立つことを言う．

**例 2.12*.** $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)\left(\cos\dfrac{n\pi}{2},\sin\dfrac{n\pi}{2}\right)\in\mathbb{R}^2$ とする．$a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}^2$ のどの点にも収束しないが，$(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$ はいずれも $a$ の集積点であり，集積点はこれらだけ

[†2)] 3) で示すように，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}|f(x)|=+\infty$ が成り立つ．$f(x)$ がどんなに大きくなっても，$e^x$ が $0$ に近づく近づき方の方が速いので掛け算すると全体としては $0$ に収束してしまう．

[†3)] 複素数まで考えることにすると，$z\neq0$ ならば $\log z$ は定義される．例えば $\log(-1)$ も定まるが，これは $(2n+1)\pi\sqrt{-1},\ n\in\mathbb{Z}$ となり，$\log$ は通常の意味での函数ではなくなってしまう．

[†4)] 厳密には**有向点列**である．つまり，$a_n$ 達には順序が指定されていて，一列に並んでいる（$a_0,a_1,a_2,\ldots$ と順序が付いている）．

である．実際，$b_n = a_{4n} = \left(1+\dfrac{1}{4n+1}\right)\left(\cos\dfrac{4n\pi}{2}, \sin\dfrac{4n\pi}{2}\right)$ とすると $b=(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $a$ の部分列であって $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} = (1,0)$ が成り立つ[†5)]．ほかの点についても同様に $a$ の部分列を選ぶことができる[†6)]．$p=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ とし，$(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$ のいずれとも異なるとする．すると，ある $\epsilon>0$ について $|x-0|>\epsilon,\ |x-1|>\epsilon,\ |x+1|>\epsilon$ が成り立つ[†7)]．すると，

$$\begin{aligned}
d(p,a_n) &= \sqrt{\left|x-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\cos\frac{n\pi}{2}\right|^2+\left|y-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\sin\frac{n\pi}{2}\right|^2}\\
&\geq \left|x-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\cos\frac{n\pi}{2}\right|\\
&\geq \left|x-\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}\right|\\
&\geq \left|x-\cos\frac{n\pi}{2}\right|-\left|\frac{1}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}\right|
\end{aligned}$$

が成り立つ（最後の不等式は問 2.1 を用いた）．ところで，$\left|\cos\dfrac{n\pi}{2}\right|\leq 1$ であるから，$n+1>\dfrac{2}{\epsilon}$ とすると $\left|\dfrac{1}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}\right|\leq\dfrac{\epsilon}{2}$ が成り立つ．従って $n+1>\dfrac{\epsilon}{2}$ ならば $d(p,a_n)\geq\dfrac{\epsilon}{2}$ が成り立つ．$N$ を $N+1\leq\dfrac{\epsilon}{2}$ が成り立つような最大の自然数とし，$\delta=\max\left\{d(p,a_0),\dots,d(p,a_N),\dfrac{\epsilon}{2}\right\}$ とおけば $\delta>0$ かつ，任意の $N\in\mathbb{N}$ について $d(p,a_n)\geq\delta$ が成り立つので，$a$ の部分列で $p$ に収束するものは存在しない[†8)]．

**問 2.13.** $p\in\mathbb{R}^n$ とする．$\mathbb{R}^n$ の有界点列 $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ について，$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}a_n=p$ が成り立つことと，$a$ は唯一つの集積点を持ち，それが $p$ であることは同値であることを示せ．ここで，$a$ が有界であるとは，$\exists\,R>0,\ \forall\,n\in\mathbb{N},\ d(o,a_n)\leq R$ が成り立つことを言う．

**問 2.14.** 次の極限などを求めよ（値が確定するのであればそれを求め，発散するのであればそのことを示せ）．

1) $\displaystyle\sup_{t\in\mathbb{Q}}\sin t$.
2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(-1)^n+\frac{1}{n}$．これについては集積点も求めよ．

---

[†5)]確かめよ．
[†6)]確かめよ．
[†7)]確かめよ．
[†8)]確かめよ．

3) $\mathbb{R}^3$ 内の図形 $T$ を

$$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \exists\theta \in \mathbb{R},\ \varphi \in \mathbb{R},\ (x,y,z) = ((10+\cos\varphi)\cos\theta, (10+\cos\varphi)\sin\theta, \sin\varphi)\right\}$$

により定める．

a) $T$ の概形を描け（座標軸とどのように交わっているかなどが分かる程度の「お絵かき」をすればよい）．

b) $\mathbb{R}^3$ 内の点列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $a_n = ((10+\cos n)\cos n, (10+\cos n)\sin n, \sin n)$ により定める．$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の集積点全体の成す集合を求めよ．

c) $\mathbb{R}^3$ 内の点列 $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $b_n = ((10+\cos\sqrt{2}n)\cos n, (10+\cos\sqrt{2}n)\sin n, \sin\sqrt{2}n)$ により定める．$\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の集積点全体の成す集合を求めよ．

ヒント：$T$ と $[0,2\pi)\times[0,2\pi) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u \in [0,2\pi),\ v \in [0,2\pi)\}$ の間の「地図」を作ってみよ．

**定義 2.15.** $A \subset \mathbb{R}^n$ とし，$f\colon A \to \mathbb{R}^m$ とする．$x \in A$ とすると $f(x) \in \mathbb{R}^m$ であるから，$f(x) = (y_1,\ldots,y_m)$ と表すことができる（縦ベクトルでも良い）．$x$ を動かすと，一般には $y_1,\ldots,y_m$ は変化する．そこで $y_1,\ldots,y_m$ を $x$ の函数と考えて $f_1(x),\ldots,f_m(x)$ で表す．すると $x \in A$ について $f(x) = (f_1(x),\ldots,f_m(x))$ が成り立つ．函数 $f_1,\ldots,f_m$ を $f$ の**成分**などと呼ぶ．また，$f = (f_1,\ldots,f_m)$ を $f$ の**成分表示**などと言う．

**定義 2.16.** $A \subset \mathbb{R}^n$ とし，$f\colon A \to \mathbb{R}^m$ とする．$f$ が $\boldsymbol{a \in A}$ **において連続である**とは，

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ (x \in A,\ d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \epsilon)$$

が成り立つこととする．また，任意の $a \in A$ において $f$ が連続であることを $f$ は $\boldsymbol{A}$ **上連続である**と言う．

**問 2.17.** 1) $m = 1$ であれば定義 2.16 は講義で与えた，多変数函数が連続であることの定義と一致することを確かめよ．

2) $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ が $a \in A$ において連続であることと，$f$ の成分 $f_1,\ldots,f_m$ 達（の全て）が $a \in A$ において連続であることは同値であることを示せ．従って，$f\colon A \to \mathbb{R}^m$ が $A$ 上連続であることと，$f$ の成分 $f_1,\ldots,f_m$ 達（の全て）が $A$ 上連続であることは同値である．ヒント：「$\Leftarrow$」の証明について，例えば $m = 2$ とする．$b = (b_1,b_2) \in \mathbb{R}^2$ とすると $\{y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid d(y,b) < \epsilon\}$ は円板であって $\{y \in \mathbb{R}^2 \mid |y_1 - b_1| < \epsilon_1,\ |y_2 - b_2| < \epsilon_2\}$

は矩形である．これらの大小関係をうまく調節することを考えてみよ．$m$ が一般の場合でも同様である．逆は易しい．

**注 2.18.** 多変数函数 $f$ が連続であることと，$f$ が変数ごとに連続であることは**異なる**（前者が成り立てば後者が成り立つが，逆は一般には成り立たない．問 1.11 の函数はそのような例である）．問 2.17 の 2) は，ベクトル値函数が成分ごとに（実数値の）**多変数函数として**連続であるならば，ベクトル値函数としても連続である，という全く異なる主張なので注意すること．このことは「微分積分学」で改めて扱う．

**問 2.19.** $A \subset \mathbb{R}^n,\ B \subset \mathbb{R}^m$ とし，$f\colon A \to B,\ g\colon B \to \mathbb{R}^l$ とする．$a \in A$ において $f$ は連続であるとし，また，$b = f(a)$ とすると $g$ は $b$ において連続であるとする．このとき，$g \circ f$ は $a$ において連続であることを示せ．
ヒント：講義では $n = m = l = 1$ の時に示したが，証明はほとんど同じである．

**定義 2.20.** $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を複素数列とする．$\{a_n\}$ が $n \to +\infty$ の時に収束することを，形式的には実数列の収束と同じ条件で定める．つまり，ある複素数 $a$ が存在し，$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0,\ n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$ が成り立つとき，$\{a_n\}$ は $n \to +\infty$ の時 $a$ に収束すると定める．

**問 2.21.** $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を複素数列とする．$n \in \mathbb{N}$ について，$b_n = \operatorname{Re} a_n,\ c_n = \operatorname{Im} a_n$ と置く（それぞれ $a_n$ の実部および虚部である）．$a \in \mathbb{C}$ とし，$a = b + \sqrt{-1}c$ と，実部と虚部に分けて表す．$n \to +\infty$ の時 $\{a_n\}$ が $a$ に収束することと，$n \to +\infty$ の時 $\{b_n\}$ が $b$ に，$\{c_n\}$ が $c$ にそれぞれ（実数列として）収束することは同値であることを示せ．

**問 2.22$^*$.** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を実数列とし，$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ がある $a \in \mathbb{R}$ について成り立つとする．

1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = a$ が成り立つことを示せ．

2) $k \in \mathbb{N},\ k > 0$ とする．$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{{a_1}^k + \cdots + {a_n}^k}{n} = a^k$ が成り立つことを示せ．

ヒント：このようなことを示そうとすると $\epsilon$–$\delta$ 論法を用いることは不可避である．例えば 1) について言えば，直感的には $n$ が大きければ $a_n$ はほぼ $a$ に等しく，一方，$\dfrac{a_1 - a}{n}$ などは 0 に収束するから，問題となっている極限はおおよそ

$$\frac{\overbrace{(a + (a_1 - a)) + \cdots + (a + (a_m - a)) + \cdots + (\text{大体 } a) + \cdots + (\text{大体 } a)}^{\text{全体の項の数は } n \text{ 個}}}{n}$$

となって，全体としてやはり「大体 $a$」になることが期待される．しかし，この「議論」全体を見れば分かるように，全く論理的でなく，このままでは何が何だかわからない．数学的に議論を整理する必要がある．

**問 2.23** $^*$**.** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を整数からなる数列とする．ある $a \in \mathbb{R}$ について $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ が成り立つならば，$a \in \mathbb{Z}$ かつ

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ a_n = a$$

が成り立つことを示せ．
ヒント：$a \notin \mathbb{Z}$ ならば，ある $r > 0$ が存在して $(a-r, a+r) \cap \mathbb{Z} = \varnothing$ が成り立つ[†9]．

**問 2.24.** $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とし，$a, b \in \mathbb{R}$ について $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a,\ \lim_{x\to+\infty} g(x) = b$ が成り立つとする．また，任意の $x \in \mathbb{R}$ について $f(x) \leq g(x)$ が成り立つとする．

1) $a \leq b$ が成り立つことを示せ．
2) $a < b$ が成り立たない，つまり $a = b$ が成り立つような例を一つ挙げよ．

**定義 2.25.** $A$ を集合とし，$f, g \colon A \to \mathbb{R}$ を函数とする．また，$\lambda \in \mathbb{R}$ とする．

1) $f + g \colon A \to \mathbb{R}$ を $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ により定める．
2) $\lambda f \colon A \to \mathbb{R}$ を $(\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$ により定める．

**注 2.26.** $V$ を $K$ 上の線型空間（ベクトル空間）とし，$f, g \colon A \to V,\ \lambda \in K$ としても全く同様のことができる．

**問 2.27.** $f, g$ を $x$ を変数とする，実数を係数とする多項式とする．多項式として計算した $f+g$ と，定義 2.25 を用いて計算した $f+g$ は一致することを示せ．また，$\lambda \in \mathbb{R}$ とすると，多項式として計算した $\lambda f$ と，定義 2.25 を用いて計算した $\lambda f$ は一致することを示せ．

$A \subset \mathbb{R}$ とする．例えば，ある $a, b \in \mathbb{R}$ について $(a, b) \subset A$ が成り立つとすると，$x \in A$ が $a$ に近づいた時の $f$ の極限や，$b$ に近づいたときの極限を考えるのは自然である．

**定義 2.28.** $A \subset \mathbb{R}$ とし，$f \colon A \to \mathbb{R}$ とする．また，$a \in \mathbb{R}$ とする．

[†9] 証明が必要なことではある．証明は自分で考えてみよ．図を描けば何をすれば良いかおおよそは感じ取れると思う．難しいのはそれを式にする所である．

1) $x \to a+0$ のとき $f(x) \to b$ が成り立つ，あるいは $x$ が**右から $\boldsymbol{a}$ に近づいたとき $\boldsymbol{f(x)}$ が $\boldsymbol{b}$ に収束する**とは

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ (x \in A,\ 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon)$$

が成り立つことを言う．このことを $\displaystyle\lim_{x \to a+0} f(x) = b$, $\displaystyle\lim_{x \searrow a} f(x) = b$ などと表す．また，このような極限値を**右極限値**と呼ぶ.

2) $x \to a-0$ のとき $f(x) \to b$ が成り立つ，あるいは $x$ が**左から $\boldsymbol{a}$ に近づいたとき $\boldsymbol{f(x)}$ が $\boldsymbol{b}$ に収束する**とは

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ (x \in A,\ -\delta < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon)$$

が成り立つことを言う．このことを $\displaystyle\lim_{x \to a-0} f(x) = b$, $\displaystyle\lim_{x \nearrow a} f(x) = b$ などと表す．また，このような極限値を**左極限値**と呼ぶ.

これらを用いると,「右（左）からは連続」といったことが定義できる.

**定義 2.29.** $A \subset \mathbb{R}$ とし，$f\colon A \to \mathbb{R}$ とする．また，$a \in A$ とする.

1) $f$ が **$\boldsymbol{a}$ において右連続である**とは,

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ (x \in A,\ 0 \le x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon)$$

が成り立つことを言う.

2) $f$ が **$\boldsymbol{a}$ において左連続である**とは,

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ (x \in A,\ -\delta < x - a \le 0 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon)$$

が成り立つことを言う.

**問 2.30.** $A \subset \mathbb{R}$ とし，$f\colon A \to \mathbb{R}$ とする．$f$ が $a \in A$ において連続であることと，$f$ が $a$ において右連続かつ左連続であることは同値であることを示せ.

**問 2.31$^*$.**
問 1.11 で定めた函数 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y) \ne (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

について

1) $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ならば $f$ は $p$ において連続であることを示せ.

2) $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ において $f$ は連続でないことを示せ.

（以上）